Algorithmique II
Année 2007-2008

Jean-François Pineau
Jean-Baptiste Rouquier

Partiel
Relations diplomatiques

Chaque réponse sera soigneusement justifiée. La correction prendra en compte la concision des réponses et la complexité des algorithmes.

Les graphes seront codés, au choix, par matrice d'adjacence ou par liste d'adjacence. Ils sont finis.

Même s'il y a un fil conducteur, les 6 exercices sont indépendants.

Il est demandé de rendre 2 copies séparées à la fin de ce partiel.

1 Marquons les frontières (à rendre sur la copie 1)

Exercice 1 En visitant les capitales du continent, nous voici à la frontière d'un pays. Après une longue période de paix, un grand réseau de routes s'est développé dans cette région, permettant d'aller dans toutes les villes de tous les pays. Si développé qu'il existe pour chaque route r deux circuits disjoints passant par cette route. « Disjoint » signifie que les deux circuits n'ont pas de route en commun (sauf bien sûr r).

Cependant, on voudrait à présent reconstruire des postes de douanes à la frontière.

Montrer qu'il existe au moins 3 routes qui traversent la frontière.

2 War's graphs (à rendre sur la copie 1)

Exercice 2 C'est la guerre ! ! ! Rien ne va plus entre les deux pays, et une armée s'apprête à débarquer. Afin d'arrêter cette invasion, il faut détruire soit les routes, soit les carrefours, afin que le réseau ne soit plus connexe. Mais ne disposant pas de beaucoup de temps (et pour penser déjà à l'après guerre), il faut minimiser le nombre d'endroits à détruire. (*Note : On ne suppose plus ici avoir 2 circuits disjoints passant par une route. Le coût de destruction d'une route est identique à celui d'un carrefour*).

1. Est-il préférable de détruire des routes, ou des carrefours ? Y a-t-il un cas où la différence est flagrante ? Peut-on transformer un plan visant à détruire n routes en un plan visant à détruire n' carrefours, $n' \leqslant n$?
2. Quelqu'un réalise alors que chaque carrefour relie exactement 3 routes. Y a-t-il encore une différence de coût entre détruire les routes ou les carrefours ?

3 Déminage (à rendre sur la copie 1)

Au beau milieu de la guerre, on soupçonne un batiment d'avoir été miné par l'ennemi. Le batiment en question est composé de pièces reliées par des couloirs, chaque couloir reliant exactement deux pièces.

On place un robot de déminage dans une des pièces. Le seul inconvénient, c'est qu'en ces temps de pénurie, le seul robot que l'on a pu trouver est un robot à deux bras, avec des pistolets à peinture au bout, un rouge et un bleu. Il a le droit de faire des marques sur les portes qu'il traverse. La reconnaissance des couleurs est un peu archaïque. Du coup, il risque de griller sur place s'il ne sait pas décider si une porte est plutôt avec plus de bleu ou plutôt avec plus de rouge. Et comme il vise très mal, on n'est pas certain que le robot réussira à bien recouvrir totalement une vieille peinture avec une nouvelle couleur et donc il vaut mieux ne l'autoriser à marquer qu'une seule fois chaque porte. Il ne peut marquer qu'un côté de chaque porte (celui qui donne sur la pièce), le côté couloir est trop sombre pour être lisible.

Le but est d'écrire un algorithme permettant au robot d'explorer toutes pièces et de s'arrêter lorsqu'il a la garantie qu'aucune bombe ne se trouve dans le batiment (ou bien qu'il a explosé sur une mine).

4 Contrebande (à rendre sur la copie 2)

On souhaite envoyer discrètement des colis vers divers lieux. On dispose du plan des routes que l'on peut emprunter. Le coût d'un trajet est essentiellement le coût des pots-de-vin (positifs...) pour acheter le silence des postes de garde à chaque carrefour. On suppose que l'on connaît le prix f de chacun des carrefours. Le prix d'un trajet est donc la somme des prix des carrefours traversés.

Pour se ramener à un autre problème, on remplace les poids sur les carrefours par des poids sur les routes. Pour une route de u à v, on définit le coût de la route par $g(u,v) := \frac{f(u)+f(v)}{2}$.

Question 1 Montrer que les chemins optimaux selon f (i.e. de coût minimal selon f) entre deux points quelconques sont les mêmes que les chemins optimaux selon g.

Question 2 On utilise bien sûr l'algorithme de Dijkstra pour trouver le coût de toutes les destinations. On utilise la fonction de coût f (et non g). Montrer que dans ce cas particulier, pendant l'exécution de l'algorithme, le coût d'une destination n'est mis à jour qu'une seule fois.

Question 3 En déduire la nouvelle complexité de l'algorithme en précisant les structures de données utilisées.

5 Navigation (à rendre sur la copie 2)

Il n'est pas demandé de démonstration dans cette partie.

Un agent des services secrets se promène sur le graphe du web à la recherche d'informations.

Question 4 Dans les deux principaux navigateurs web, un clic du milieu sur un lien l'ouvre dans un nouvel onglet. Mais leurs comportements précis sont différents :
- Dans Firefox, l'onlet est placé après tous les onglets déjà ouverts.
- Dans Internet Explorer®, les onglets ouverts depuis une même page sont placés juste après l'onglet de cette page.

Notre agent clique (du milieu) sur tous les liens d'une page, et quand il a lu une page en entier il ferme l'onglet de cette page. Faire un lien avec le cours.

Question 5 Sur certains sites web de webmestres incompétents, les liens déjà visités sont de la même couleur que les liens jamais visités. Faire à nouveau un lien avec le cours.

6 Pour bien finir (à rendre sur la copie 2)

Question 6 Quand on évalue la complexité d'algorithmes sur les graphes représentés par des listes d'adjacences, on considère souvent que ces listes sont triées. Si elles ne le sont pas, peut-on les trier rapidement ?