

## TD 1

# Initiation aux graphes

### 1 Réunion Mondaine

**Exercice 1** Un couple reçoit chez lui quatre autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois de la soirée, certaines personnes se serrent la main. À la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse, combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que l'on ne serre pas sa propre main ni celle de son conjoint :

- a - combien l'hôte a-t-il serré de mains,
- b - combien son épouse a-t-elle serrée de mains ?

### 2 Quelques propriétés sur les graphes

**Exercice 2** Montrer que dans tout graphe  $G = (V, E)$  sans boucle (i.e., sans arête d'un sommet vers lui même), il existe deux sommets de même degré.

**Exercice 3** A quoi ressemble un graphe dont tous les sommets sont de degré 1 exactement ? de degré 2 exactement ? Si un graphe (non orienté) a  $n$  sommets, tous de degré  $k$ , que dire de  $nk$  ?

**Exercice 4** Quels sont les nombres entiers qui peuvent être l'ordre (i.e. nombre de sommets) d'un graphe  $k$ -régulier ? Construire de tels graphes.

### 3 Petits problèmes...

**Exercice 5** On colorie les arêtes d'un graphe complet d'ordre  $n$ ,  $n \geq 6$ , avec deux couleurs. Montrer qu'il existe nécessairement un triangle monochromatique. Donner un contre-exemple à cette propriété avec  $n = 5$ .

**Exercice 6** Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe.

- Montrer que deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont un sommet en commun.

- Montrer que si  $G$  est un arbre toutes les chaînes de longueur maximum ont un sommet en commun.

**Exercice 7** On suppose qu'il existe deux chaînes disjointes (au sens des arêtes) entre deux sommets  $x$  et  $y$ . Montrer qu'il existe deux chaînes arêtes-disjointes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  entre  $x$  et  $y$  qui vérifient la condition suivante. Si on note  $a_1, a_2, \dots, a_p$  (resp.  $b_1, b_2, \dots, b_p$ ) l'ordre sur  $\mu_1$  (resp. sur  $\mu_2$ ) en allant de  $x$  vers  $y$  des sommets de  $\mu_1 \cap \mu_2$  alors  $a_i = b_i, \forall 1 \leq i \leq p$ .

**Exercice 8** Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec  $|V| = 2n$  et  $|E| = m$ . Montrer que si  $G$  ne contient pas de cycle de longueur 3 alors  $m \leq n^2$ .

**Exercice 9** Pour  $n \geq 2$ , montrer qu'il existe exactement deux graphes à  $n$  sommets ayant un unique couple de sommets de même degré. On donnera un procédé de construction.