Algorithmique II
Année 2007-2008

Jean-François Pineau
Jean-Baptiste Rouquier

TD n°2
Graphes à part (ou l'inverse)

1 Du côté d'Escher

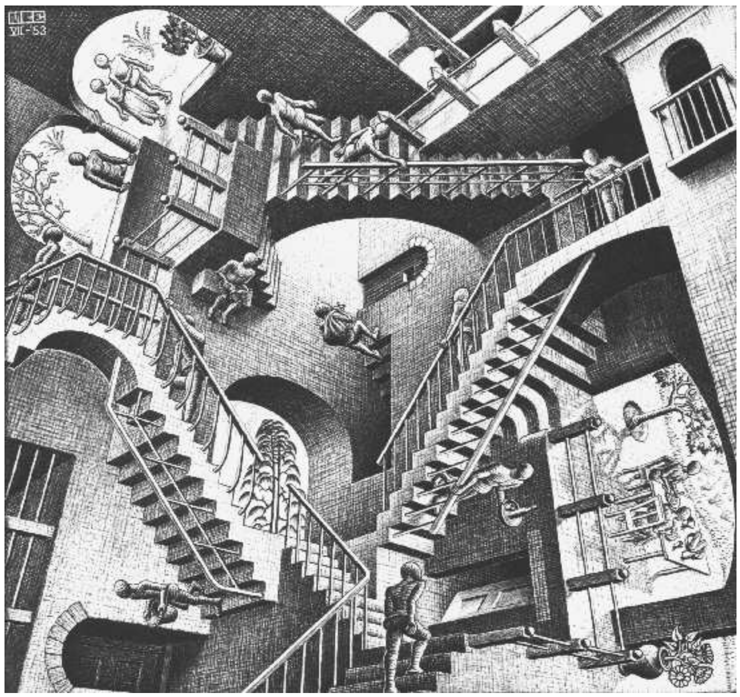

FIG. 1 – Relativity, 1953

Nous sommes dans la maison de Maurits Cornelis Escher. On y trouve des escaliers qu'on ne peut que descendre[1] qui relient entre eux des paliers (il n'y a pas d'escalier arrivant squr son point de départ).

Si en prenant une suite d'escaliers (au moins un), on arrive à retourner sur le palier de départ (balèze hein !), c'est qu'on a trouvé un circuit d'escaliers d'Escher.

Un ensemble de paliers où l'on peut librement aller et revenir (en suivant des circuits d'Escher) est appelé une plate-forme d'Escher.

Exercice 1

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher si et seulement si chaque plate-forme d'Escher ne contient qu'un palier.
2. On suppose qu'il existe au moins un circuit d'Escher. Écrire un algorithme linéaire en le nombre de paliers et d'escaliers, qui renvoie un circuit élémentaire d'Escher.

[1] Si ça vous pose problème, imaginez que ce sont des escalators très très rapides.

Solution :

1. *Circuit de taille n implique composante connexe de taille au moins n.*
2. *Parcours en profondeur avec 3 couleurs : blanc signifiant «jamais exploré», gris pour «descendance en cours d'exploration» et noir pour «descendance explorée». Si on tombe sur un nœud déjà colorié en gris, on a un circuit et il est élémentaire par construction. Réciproquement, s'il y a un circuit alors on le trouve avec cette méthode.*

□

Exercice 2 On note $P_i, 1 \leq i \leq k$, les plates-formes d'Escher. De son côté, le voisin d'Escher veut construire une maison similaire, mais possèdant k paliers notés p_i. Il aura un escalier (descendant forcément) entre deux paliers p_i et p_j si et seulement si il existe un escalier entre un palier de P_i et un de P_j chez Escher, $i \neq j$.

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher dans la maison du voisin.
2. Donner un algorithme de construction de la maison du voisin pour le maçon, en temps linéaire.

Solution :

1. *S'il y avait un circuit, le tout formerait une grosse composante connexe.*
2. *Décomposition en composantes connexes du Cormen (ou du cours), puis parcours simple du graphe en ajoutant les bonnes arêtes.*

□

Exercice 3 Une maison est à deux étages si on peut partitionner l'ensemble des paliers en deux parties de telle manière qu'il n'existe des escaliers (qu'on peut monter et descendre cette fois) qu'entre un étage et l'autre.

1. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) la maison est à deux étages ;
   (b) il n'y a pas de cycle d'Escher de longueur impaire ;
   (c) il n'y a pas de cycle élémentaire d'Escher de longueur impaire.
2. Écrire un algorithme de reconnaissance des maisons à deux étages. Évaluer la complexité de cet algorithme.

Solution :

1. **a $\Rightarrow$ b :** *par contraposée (on ne peut pas colorier un cycle de longueur impaire avec deux couleurs or biparti = 2-colorable) ;*

   b $\Rightarrow$ a : *supposons qu'on n'a pas de cycle de longueur impaire. On fait un parcours en répartissant les sommets dans les deux groupes. Supposons qu'on n'y arrive pas, c'est qu'on est arrivé à un nœud x qui a un voisin déjà placé dans la même partie que lui. Puisque ce voisin est déjà placé, c'est qu'il est dans la même partie connexe et donc il y a un chemin de x à y. Comme on n'a jamais eu de problème jusqu'à présent, tous les nœuds de ce chemins sont en alternance dans les deux parties. Donc ce chemin est de taille paire et donc ce chemin augmenté de xy est un cycle de longueur impaire. Contradiction.*

   b $\Rightarrow$ c : *trivial ;*

c ⇒ b : *par la contraposée, soit un cycle c de longueur impaire qui soit minimale. Supposons qu'il ne soit pas élémentaire, alors il existe un sommet x tel que* $c = x_1, x_2, \ldots x_i = x, \ldots x_j = x, \ldots x_k$ *avec* $i < j$. *Alors on peut construire deux cycles* $c_1 = x_1, \ldots x_i, x_{j+1}, \ldots x_k$ *et* $c_2 = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$. *Or* $|c| = |c_1| + |c_2|$ *donc l'un deux deux est de taille impaire et strictement plus petite que* $|c|$ *ce qui contredit la minimalité de c donc c est élémentaire.*

2. *On essaie de colorier le graphe avec deux couleurs par un parcours en largeur, à chaque étage sa couleur. En cas de conflit, c'est pas biparti.*

□

2 Prenez vos cliques et vos claques

Exercice 4 On considère un graphe $G = (X, E)$ non orienté et sans boucles. Une *clique* de G est un sous-graphe complet. Une clique K est maximale si elle est maximale par inclusion : $\forall x \in X - K, K \cup \{x\}$ n'est pas une clique. Ne pas confondre clique maximale et clique de taille maximale.

1. Donner un algorithme de calcul d'une clique maximale. Quelle est sa complexité ? Pouvez-vous faire en $O(n + m)$?
2. Modifier l'algorithme précédent pour chercher deux sommets à distance 2 dans un graphe connexe non complet.
3. Proposer une méthode différente pour rechercher deux sommets à distance 2.

Solution :

1. *On part d'un point o. On étiquette tous ses voisins avec le nombre* $n = 1$ *(on peut supposer que tous les autres sont étiquettés 0). Ces voisins forment la liste L.* $\{o\}$ *est la clique initiale K. Rajouter un sommet : soit* $x \in L$, *on rajoute x à K et on parcours tous ses voisins : ceux qui sont étiquettés n sont réétiquettés* $n + 1$ *et forment la nouvelle liste L. On s'arrête quand L est vide. K est alors maximale.*
2. *On part de o, on construit une clique maximale K contenant o. Soit* $x \notin K$ *voisin de K. x est à distance 2 de tout* $y \in K$ *tel que* $xy \notin E$. *Comme le graphe est connexe et non complet, on est sûr de l'existance d'un tel x.*
3. *On part de* $v_1 \in V$, *on étiquette par 1 les voisins de* v_1. *On note* $N(v)$ *les voisins de v. Si* $N(v_1) = V$ *on recommence avec le sommet suivant. Sinon, pour chaque sommet de* $N(v_1)$, *on teste s'il a un voisin p hors de* $N(v_1)$. *Si oui, p est à distance 2 de o. Chaque arête est testée au plus 2 fois, donc cet algorithme est linéaire.*

□

Notes de fin de TD

Dans la vraie vie, un circuit [élémentaire] d'Escher est un *circuit [élémentaire]* dans un *graphe orienté*, une plate-forme d'Escher est une *composante fortement connexe* et une maison à deux étages est un *graphe biparti.*