

TD n°3 Graphes Eulériens

1 Échauffement

Définition 1 On appelle cheminement maximal d'origine x toute chaîne de la forme $\mu = (x, \dots, y)$ telle que toutes les arêtes incidentes à y sont dans μ , i.e. on ne peut plus prolonger la chaîne à partir de y .

Exercice 1 Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, dont tous les sommets ont un degré pair. Montrer que tout cheminement maximal est un cycle.

Solution : Soit un cycle maximal $\mu = (x, \dots, y)$. Comme μ est maximal, toutes les arêtes de y sont dans μ . Supposons par l'absurde $x \neq y$, et dénombrons les arêtes adjacentes à y :

x_i, y, x_{i+1}	2 arêtes à chaque passage
x_{n-1}, x_n, y	1 arête à la fin du cycle μ
Total	2k + 1 arêtes.

ce qui est une contradiction. □

Exercice 2 On considère un graphe connexe $G = (X, E)$ et un cycle ν de ce graphe. Montrer que toutes les composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p de $G \setminus \nu$ (on retire les arêtes, pas les sommets) ont chacune un sommet en commun avec ν .

Solution :

Soit $y \in \nu$. Comme G est connexe, pour tout $x \in X$, il existe μ un chemin minimal entre x et y . Soit x' le premier sommet de ν sur μ .

Dans $G \setminus \nu$, x est toujours lié à x' par le début de μ (car x' est le premier sommet de ν sur μ). Donc la composante connexe de x a le sommet x' en commun avec ν . □

2 Tourisme

Un ancien L3If arrive en touriste dans une grande ville. Il a noté toutes les rues qu'il voudrait parcourir avant de partir. Il aimerait passer une et une fois seulement par chacune de ces rues.

Se creusant la mémoire pour retrouver ses anciens cours de graphe, il se souvient que ce dont il a besoin ici est de trouver un cycle eulérien.

Flash Back 1 Un cycle eulérien est un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe. Un graphe est dit eulérien s'il est connexe et s'il existe un cycle eulérien.

Exercice 3 Montrer que G est eulérien si et seulement si pour tout sommet x , $d(x)$ est pair.

Solution :

\Rightarrow Soit G un graphe connexe, eulérien. Alors, il existe un cycle $\mu = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ passant une fois et une seule par toutes les arêtes. μ peut être considéré comme un cheminement maximal, donc, d'après la question 1, $d(x_1)$ est pair. De même, en considérant le cheminement maximal $(x_2, \dots, x_n, x_1, x_2)$, on trouve que $d(x_2)$ est pair. En itérant le procédé, on trouve que $\forall x \in X$, $d(x)$ pair.

\Leftarrow Soient ν un cheminement maximal (donc un cycle d'après la question 1), C une composante connexe de $G \setminus \nu$. Pour tout sommet x , les arêtes de ν adjacentes à x sont en nombre pair. Donc les sommets de C sont de degré pair.

On obtient récursivement un cycle eulérien μ dans C . Soit x un sommet commun à μ et ν (existant grâce à la question 2). On peut donc écrire $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x, \mu_{i+1}, \dots, \mu_{|\mu|})$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{j-1}, x, \nu_{j+1}, \dots, \nu_{|\nu|})$. On combine alors ces deux cycles en un seul cycle $(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x, \nu_{j+1}, \dots, \nu_{|\nu|}, \nu_1, \dots, \nu_{j-1}, x, \mu_{i+1}, \dots, \mu_{|\mu|})$. On fait de même avec les autres composantes connexes, et l'on obtient un cycle eulérien.

□

Exercice 4 En déduire un algorithme qui teste si un graphe est eulérien, et construit un cycle eulérien le cas échéant.

Solution : Principe de l'algorithme :

- construire un cheminement maximal
- l'enrichir par un autre cheminement maximal ayant un sommet en commun avec le précédent
- répéter jusqu'à être passé par toutes les arêtes.

Vérifier que G est connexe;
calculer le degré de chaque sommet, vérifier qu'ils sont tous pairs;
sélectionner un sommet x quelconque;
 $\nu \leftarrow$ cheminement de x maximal;
while ν ne contient pas toutes les arêtes de E **do**
 trouver x dans ν tel que toutes arêtes incidentes à x ne sont pas dans ν ;
 $\mu \leftarrow$ cheminement maximal d'origine x ;
 $\nu \leftarrow$ union(x, ν, μ);

□

Exercice 5 Quelle structure de données utiliser afin d'obtenir un algorithme en $O(n + m)$?

Solution :

On a besoin d'une copie du graphe, que l'on va détruire au fur et à mesure. On utilisera un tableau de listes représentant tous les voisins de x Γ^+x . Les listes seront doublement chaînées pour pouvoir réaliser les suppressions en temps constant. Comme le graphe est non orienté, l'arête xy sera stocké dans Γ^+x et dans Γ^+y . Lorsqu'on prolonge le cheminement à partir d'un sommet x , on prend le premier y dans la liste Γ^+x et on supprime cet arc (x, y) . Ce faisant, il faut aussi supprimer l'arc (y, x) . Pour pouvoir le faire en temps constant, il est nécessaire de chaîner les deux occurrences de la même arête entre elles.

Le cycle ν sera représenté par une liste doublement chaînée et un tableau `position_nu` pointera sur la première occurrence de i dans la liste ν .

`Candidat` sera une liste qui contient les sommets apparaissant dans ν , un sommet n'apparaissant qu'une fois, et `Candidat_bis` sera un tableau de booleen, étant à vrai si et seulement si x est dans la liste `Candidat`.

les degrés des sommets sont gérés par un tableau d'entiers

le cheminement μ est représenté par une liste doublement chaînée.

- Pour construire le cheminement, lorsqu'on considère l'arc (x,y) , on supprime (x,y) et (y,x) , et on décrémente les degrés de x et y de 1.
- Lorsque le cheminement est terminé, on sait l'insérer dans ν grâce à `position_nu`.
- Pour trouver un x dans ν tel que toutes les arêtes incidentes à x ne soient pas dans ν , il suffit de balayer la liste `Candidate` et récupérer le premier x tel que $d(x) > 0$. Globalement, sur l'algorithme, cette liste sera balayée une fois et une seule.

□

Exercice 6 Après vérification, notre ancien L3If s'aperçoit que son graphe possède exactement 2 sommets de degré impair. Il ne peut donc pas trouver de cycle eulérien...

- Mais peut-il passer une fois et une seule par chaque arête quand même ?
- Et si il y avait plus de sommets de degré impair ?

(On dit qu'un graphe connexe est semi-eulérien s'il existe une chaîne non fermée passant une fois et une seule par chaque arête.)

Solution :

- Soit G un graphe connexe, et x_1, x_2 ses 2 seuls sommets de degré impair. Ajoutons un sommet z et les arêtes x_1z et zx_2 (on pourrait n'ajouter qu'une seule arête en vérifiant que les propriétés dont on a besoin sont toujours vraies sur les multigraphes). Alors $G' = G \cup (x_1, x_2)$ est eulérien, donc il existe un cycle eulérien $(x_1, \dots, x_2, z, x_1)$, donc (x_1, \dots, x_2) est une chaîne non fermée passant une fois et une seule par chaque arête.
- S'il existe un chemin passant une fois et une seule par chaque arête $\mu = (x, x_1, \dots, x_n, y)$, alors avec la même démonstration qu'à la question 1, on montre que pour tout i $d(x_i)$ est pair, et que $d(x)$ et $d(y)$ sont pairs. Il y a donc deux sommets de degré impair dans un graphe semi-eulérien.

□

Exercice 7

Notre L3IF arrive devant un ancien édifice (figure 7). Chaque pièce est reliée à une pièce adjacente par une porte possédant une ornementation *magnifique*, il serait dommage de ne pas toutes les emprunter. Chaque pièce possède également une porte de sortie sur chacune de ses façades. Est-ce possible d'emprunter chaque porte une fois et une seule ?

Solution : Non (4 sommets de degré impair)

□

3 Mais que fait l'arbitre ?

Un graphe connexe est dit arbitrairement eulérien en x si tout cheminement maximal d'origine x est un cycle eulérien.

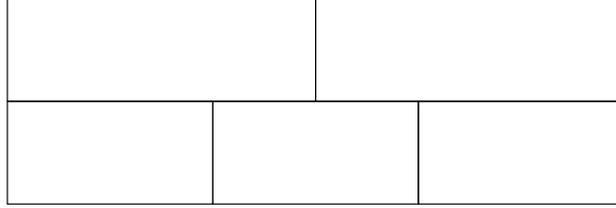


FIG. 1 – Dessine moi un chemin...

Exercice 8 Montrer que G est arbitrairement eulérien en x si et seulement si G est eulérien et tout cycle de G passe par x .

Solution :

- \Rightarrow G est eulérien (trivial). Supposons par l'absurde qu'il existe μ un cycle ne passant pas par x . Soit C la composante connexe de x dans $G \setminus \mu$. C est eulérien (voir démonstration de la question 3), soit ν un cycle eulérien de C . ν est un cheminement maximal partant de x dans G , qui n'est pas un cycle eulérien, contradiction.
- \Leftarrow Soit μ un cheminement maximal d'origine x ; il sature x . Supposons par l'absurde que μ n'est pas eulérien. Il existe alors une composante connexe C de $G \setminus \mu$. C est eulérien, donc contient un cycle eulérien. Ce cycle (quelconque pour G) ne passe pas par x , contradiction.

□

Exercice 9 Soit F est une forêt où chaque arbre a au moins deux sommets et x un nouveau sommet (i.e. n'appartenant pas à F). Montrer qu'en joignant par une arête x à tous les sommets de degré impair de F , on obtient un graphe arbitrairement eulérien en x . La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

- \Rightarrow Tous les sommets de $F \cup x$ sont de degré pair (même x , car il y a un nombre pair de sommets de degré impair), donc le graphe est eulérien. Comme aucune composante connexe de F n'a de cycle, tout cycle passe par x .
- \Leftarrow Soit G un graphe arbitrairement eulérien en x . Comme tout cycle passe par x , les composantes connexes de $G \setminus x$ forment une forêt. De plus, comme tous les sommets sont de degré pair supérieur ou égal à 2, ils ont dans $G \setminus x$ un degré supérieur ou égal à 1. Donc chaque arbre a au moins 2 sommets.

□

Notes de fin de TD

On peut remarquer que les résultats des questions 3 et 6 s'étendent sans problème aux multigraphes.