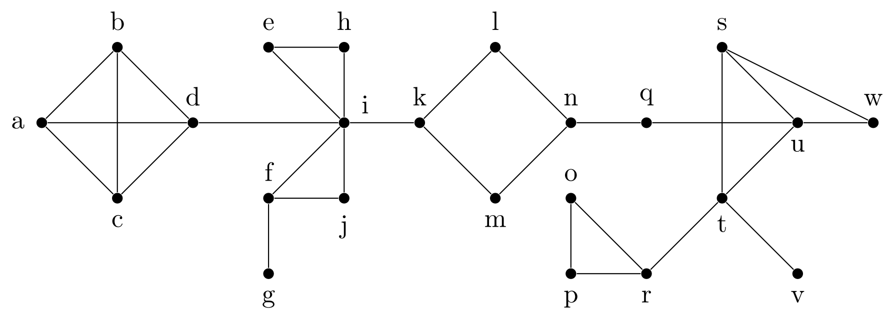
Algorithmique II
Année 2007-2008

Jean-François Pineau
Jean-Baptiste Rouquier

# TD 4
# Recouvrement d'arbre

## 1 Et les coudes, et les genoux, et les chevilles




Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe. Un *point d'articulation* de $G$ est un sommet dont la suppression déconnecte le graphe. Un *isthme* est une arête dont la suppression déconnecte le graphe. Une *composante 2-connexe* de $G$ est un ensemble maximal connexe de sommets tel que le sous-graphe induit par ces sommets n'a pas de point d'articulation.

On notera $T = (V, F)$ un arbre de parcours de $G$ obtenu par parcours en profondeur et $deb(v)$ le début de visite de $v$ dans la numérotation associée à ce parcours en profondeur.

**Question 1** Sur l'exemple ci-dessus, déterminer les points d'articulation, les isthmes et les composantes 2-connexes.

**Solution :**
- *Points d'articulation :* $d, f, i, k, n, q, r, t, u$ *;*
- *Isthmes :* $di, fg, ik, nq, qu, tr, tv$ *;*
- *Composantes 2-connexes :* $\{a, b, c, d\}, \{e, h, i\}, \{i, f, j\}, \{k, l, m, n\}, \{o, p, r\}, \{s, t, u, w\}$*, plus les isthmes.*

□

**Question 2** Expliquer pourquoi dans le parcours en profondeur d'un graphe non orienté et connexe on n'obtient que deux sortes d'arcs : les arcs de l'arbre et les arcs retours.

**Solution :** *Supposons par l'absurde que l'on rencontre un arc de transitivité* $(x, y)$*. Cela signifie que l'arc* $(x, y)$ *est traité pendant le traitement de* $x$ *alors que l'on connaît déjà un chemin* $\mu$ *de* $x$ *à* $y$*. Donc que l'on a terminé le traitement de tous les sommets de* $\mu$*, en particulier de* $y$*. Mais on aurait du traiter l'arête* $(y, x)$ *pendant le traitement de* $y$*.*

*Supposons par l'absurde que* $(x, y)$ *est un arc traversier, c'est-à-dire que l'on a terminé le traitement de* $y$ *avant de commencer celui de* $x$*. Mais on ne peut pas terminer le traitement d'un sommet avant d'avoir terminer le traitement de tous ses voisins, contradiction.* □

**Question 3** Montrer que la racine de $T$ est un point d'articulation si et seulement si elle a au moins deux fils dans $T$.

**Solution :** *Appelons r la racine. Supposons que r soit un point d'articulation et notons* $C_1, C_2, \cdots, C_p$ *les composantes connexes de* $G \smallsetminus \{r\}$. *Le parcours en profondeur à partir de r va visiter la première composante* $C_1$ *puis se retrouvera bloqué et sera obligé de revenir sur r pour pouvoir visiter* $C_2$. *Les premiers sommets* $r_1$ *et* $r_2$ *de* $C_1$ *et* $C_2$ *rencontrés par l'algorithme seront des fils de r dans T.*

*Réciproquement, supposons que les fils de r soient* $r_1, r_2, \cdots, r_p$ *et notons* $C_i$ *l'ensemble des sommets au-dessous (au sens large) de* $r_i$. *Alors* $C_1, C_2, \cdots, C_p$ *sont les composantes connexes de* $G \smallsetminus \{r\}$. *En effet, les seuls arcs ayant une extrémité dans* $C_i$ *et l'autre à l'extérieur de* $C_i$ *sont des arcs de retour ; ils sont donc de la forme* $(v, r)$. *En supprimant r, on interdit le passage de* $C_i$ *à* $C_j$, $j \neq i$. □

**Question 4** Dans toute la suite, « descendant » est pris au sens large : $x$ est un descendant de $x$ (contrairement aux conventions habituelles).

Soit $x$ un sommet de $T$ distinct de la racine. Prouver que $x$ est un point d'articulation si et seulement s'il existe un fils $y$ de $x$ dans l'arbre tel qu'il n'existe pas d'arc retour de la forme $(z, t)$ où $z$ est un descendant de $y$ et $t$ un ancêtre propre de $x$.

**Solution :** *On va montrer les deux contraposées.*

*Supposons que x n'est pas un points d'articulation. Pour tout fils y de x, il existe donc un chemin de y au père de x ne passant pas par x. Soit* $(z, t)$ *le premier le premier arc de ce chemin tel que t n'est pas un descendant de y (z est donc un descendant de y). Cet arc ne peut être un arc de la forêt (sinon t serait x ou un descendant de y). D'après la question 2, c'est donc un arc retour.*

*Réciproquement, supposons que pour tout fils* $y_i$ *de x il existe un descendant de* $z_i$ *de* $y_i$ *et* $t_i$ *un ancêtre de x tel que* $(z_i, t_i)$ *soit un arc retour. Soient a et b deux sommets de G ; montrons qu'ils sont toujours connectés dans* $G \smallsetminus \{x\}$. *Il suffit de montrer qu'il existe un chemin de a au père de x : par symétrie, il en existera un de b au père de x, et en concaténant les deux chemins on obtiendra un chemin de a à b.*

*Si a est un ancètre de x, c'est clair. Sinon, i.e. si* $a \in C_i$, *il existe un chemin dans* $C_i$ *de a à* $z_i$, *et un chemin de* $t_i$ *au père de x dans la composante connexe des ancêtres de x. On concatène ces deux chemins autour de l'arc* $(z_i, t_i)$ *et l'on obtient un chemin de a au père de t.*

$G \smallsetminus \{x\}$ *est connexe donc x n'est pas un point d'articulation.* □

**Question 5** On définit la fonction `au_dessous` de $V$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} \texttt{au\_dessous}(x) &:= \min(\{deb(x)\} \cup A_x) \\ A_x &:= \{deb(z) \mid (y, z) \text{ est un arc retour avec } y \text{ descendant de } x\} \end{aligned}$$

Donner un algorithme en $\mathscr{O}(n + m)$ de calcul de la fonction `au_dessous`. On prouvera la complexité.

**Solution :** `au_dessous`$(x)$ *est le minimum d'un ensemble d'éléments. On note que les* $deb(z)$ *intervenant dans la définition de cet ensemble pour y descendant strict de x sont exactement les* $deb(z)$ *intervenant dans la définition des* `au_dessous`$(y)$ *pour les y fils de x. On peut donc reformuler la définition de* `au_dessous` *:*

$$\texttt{au\_dessous}(x) = \min(\{deb(x)\} \cup \{deb(z) \mid (x, z) \textit{ arc retour}\} \cup \{\texttt{au\_dessous}(y) \mid y \textit{ fils de } x\})$$

*On réalise donc un parcours en profondeur, lorsque* `au_dessous` *est connue pour tous les fils d'un nœud, on peut calculer* `au_dessous` *pour ce nœud.*

**foreach** $x \in V$ **do**
    *deb*$(x) \leftarrow 0$
    *père*$(x) \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$x \leftarrow$ *sommet quelconque de G*
*recherche*$(x)$

***Procedure*** `main`

$deb(x) \leftarrow i$
$au\_dessous(x) \leftarrow i$
$i \leftarrow i+1$
**foreach** $y \in \Gamma(x)$ **do**
  **if** $deb(y) = 0$ **then**
    $recherche(y)$
    $au\_dessous(x) \leftarrow min(au\_dessous(y), au\_dessous(x))$
    $père(y) \leftarrow x$
  **else**
    **if** $y \neq père(x)$ **then** $au\_dessous(x) \leftarrow min(deb(y), au\_dessous(x))$

***Procedure*** `recherche`$(x)$

`recherche` *est appelée une fois sur chaque sommet. Les autres opérations se font en temps constant. D'où la complexité linéaire.* □

**Question 6** Montrer comment calculer tous les points d'articulation en $\mathcal{O}(n+m)$.

**Solution :** *Pour la racine, il suffit de tester si elle a au moins deux fils dans l'arbre.*

*Pour tester si les autres sommets sont des points d'articulation, il suffit de vérifier la condition de la question 4. Pour un fils $y$ de $x$ dans l'arbre, il existe un arc retour de la forme $(z,t)$ où $z$ est un descendant de $y$ et $t$ un ancêtre propre de $x$ si et seulement si* `au_dessous`$(y) < deb(x)$.

*On initialise un ensemble* `articulation` *à $\varnothing$ dans le programme principal et on ajoute en fin de procédure recherche la boucle suivante :*

**if** $deb(x) \neq 1$ **then**
  **foreach** $y \in \Gamma^+(x)$ **do**
    **if** $père(y) = x$ **then**
      **if** $au\_dessous(y) \geqslant deb(x)$ **then** articulation $\cup= \{x\}$

□

**Question 7** Prouver qu'une arête est un isthme si et seulement si elle n'appartient à aucun cycle élémentaire.

**Solution :** *Soit $xy$ un isthme. Par l'absurde, supposons que $xy$ appartienne à un cycle élémentaire $(x, x_1, ..., x_n, y)$. Comme $xy$ est un isthme, il existe 2 sommets $u$ et $v$ non reliés dans $G \setminus \{xy\}$. Or $G$ est connexe donc il exise un chemin $(u, ..., x, y, ..., v)$. Donc $u$ et $v$ sont toujours reliés par $(u, ..., x, x_1, ..., x_n, \dots, v)$. Contradiction.*

*Réciproquement, soit $xy$ qui ne soit pas un isthme. $x$ et $y$ sont toujours reliés par une chemin $\mu$ dans $G \setminus \{xy\}$. En concaténant $\mu$ et $xy$, on obtient un cycle de $G$.* □

**Question 8** Montrer comment calculer les isthmes en $\mathcal{O}(n+m)$.

**Solution :** *Remarquons qu'un isthme est forcément une arête de l'arbre. En effet tout arc de retour $(x,y)$ se trouve par définition sur un cycle car il y a une chaîne de l'arbre allant de $y$ à $x$. Les isthmes sont donc les arêtes $(x,y)$ avec* `au_dessous`$(y) = deb(y)$. *Lorsqu'on termine la recherche en $x$, on teste si $deb(x) =$* `au_dessous`$(x)$. *Si c'est le cas, l'arête $(père(x), x)$ est un isthme.* □

**Question 9** Considérer le graphe $H$ dont les sommets sont les composantes 2-connexes de G et tel que deux composantes sont adjacentes si et seulement si elles ont au moins un sommet en commun. Que pouvez vous dire de ce graphe ?

**Solution :**

- *Le graphe $H$ est connexe. Soient en effet $A$ et $B$ deux sommets de $H$, i.e. deux composantes 2-connexes de $G$ contenant respectivement $a$ et $b$. $G$ est connexe, donc il existe un chemin $\mu = (x_1, ..., x_k)$ de $a$ à $b$. Toute arête de $G$ appartient à une composante 2-connexe, donc les arêtes de $\mu$ deviennent des sommets de $H$. Chacun de sommet (correspondant à $x_i x_{i+1}$) est soit identique au précédent (si $x_{i-1}x_i$ et $x_i x_{i+1}$ sont dans la même composante 2-connexe de $G$) soit voisin du précédent (car alors $x_i$ donne lieu à une arête de $H$). On obtient donc un chemin de $A$ à $B$ dans $H$.*
- *Les arêtes de $H$ représentent les point d'articulation de $G$. En effet, il n'y a pas de points d'articulation à l'intérieur d'une composante 2-connexe, et les composantes 2-connexes sont reliées au reste du graphe par un unique sommet (sinon, on aurait un cycle, et donc une composante 2-connexe plus grande aurait pu être formée), qui est donc par définition un point d'articulation.*

*Noter que Ce n'est pas un arbre : les 4 sommets $\{e, h, i\}$, $\{f, j, i\}$, $\{d, i\}$, $\{i, k\}$ issus du graphe $G$ donné en exemple forment une clique.* □

Ceci explique pourquoi on n'a pas défini « composante 2 connexe » par le fait qu'il faille couper deux arêtes pour déconnecter le graphe.

# 2 L'hiver, il faut se couvrir

**Exercice 1** Soit $T = (X, E)$ un arbre, on appelle *ensemble dominant* de $T$ une partie $S \subseteq X$ vérifiant :

$$\forall x \in X \quad \exists y \in S \quad x = y \text{ ou } xy \in E$$

On cherche un ensemble dominant de cardinal minimum.

1. Pour $|T| \geqslant 3$, montrer qu'il existe toujours un ensemble dominant de cardinal minimum ne contenant aucune feuille de $T$.

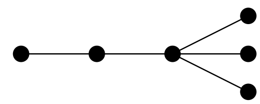
   **Solution :**
   *Sinon, soient $S$ dominant de cardinal minimal, $F$ l'ensemble des feuilles de $S$, et $F'$ l'ensemble des voisins de $F$. Alors $S' = (S \setminus F) \cup F'$ n'a pas de feuilles. Il est dominant : supposons $x \in X$ dominé par $y \in S$, alors*
   – *soit $y$ n'est pas une feuille, donc $y \in S'$*
   – *soit $y$ est une feuille, donc soit $x = y$, et $x$ est dominé par $\Gamma(y) \in S'$, soit $x = \Gamma(y) \in S'$.*
   *Il est de cardinal minimal : $|F'| \leqslant |F|$ donc $|S'| \leqslant |S|$.* □

2. Un élève imagine l'algorithme suivant.

   $S \leftarrow \varnothing, F \leftarrow T$
   **while** $F$ *contient un sommet $x$ de degré 1* **do**
   $\quad y = \Gamma(x)$
   $\quad S \leftarrow S \cup \{y\}$
   $\quad F \leftarrow F - \Gamma(y) - \{y\}$
   **if** $F \neq \varnothing$ **then**
   $\quad$ ajouter tous les sommets restants (isolés) de $F$ à $S$
   **return** $S$

   Montrer que cet algorithme ne fournit pas toujours un ensemble dominant de cardinal minimum.

**Solution :** *Exemple d'un graphe scorpion :*



□

3. Décrire un algorithme le plus efficace possible pour calculer un ensemble dominant $S$ de cardinal minimum. (*Note : On peut le faire en* $O(n)$).

**Solution :**

$S \leftarrow \varnothing$ *//ensemble des dominants*
$D \leftarrow \varnothing$ *//ensemble des dominés*
$F \leftarrow T$
**while** $\exists x$ *feuille de* $F$ **do**
  **if** $x \in S$ **then** $D \cup\!= \Gamma(x)$
  **if** $x \notin D \cup S$ **then** $S \cup\!= \Gamma(x)$
  $F \leftarrow F \setminus \{x\}$

□

**Exercice 2** (non corrigé)

Dans cet exercice, $G = (X, E)$ est un graphe connexe dont les arêtes sont munies d'une valuation $p$ strictement positive, et $T = (X, F)$ est un arbre couvrant de poids minimum. Le but ici sera de calculer le second arbre couvrant de poids minimum $T'$.

1. Montrer qu'il existe un $T'$ de la forme $T - \{e\} + \{f\}$, avec $e \in F, f \in E \backslash F$.
2. Étant donné un sommet $x$ fixé, donner un algorithme en $O(n)$ calculant pour tout $y \in X - \{x\}$ l'arête $zt$ de poids maximum sur l'unique chaîne de $T$ reliant $x$ à $y$. Le résultat sera stocké dans un tableau de taille $n$, arête[$y$] contiendra $zt$. Justifier la complexité de l'algorithme.
3. On appelle $T_x$ un arbre recouvrant de plus petit poids de la forme $T_x = T - \{e\} + \{f\}$, où $e \in F$ et $f = xy \in E \backslash F$. Donner un algorithme en $O(n)$ calculant $T_x$ et justifier la complexité.
4. En déduire un algorithme calculant $T'$. Quelle est la complexité ?