Jean-François Pineau
Jean-Baptiste Rouquier

TD 5
Drôle de graphe

1 Animaux

Exercice 1 Un graphe $G = (X, E)$ non orienté est un graphe *scorpion* s'il existe trois sommets x, y, et z, tel que

- $d(x) = 1$ (x est le dard)
- $d(y) = 2$ et $xy \in E$ (y est la queue)
- $d(z) = n - 2$ et $yz \in E$ (z est la tête)

Les autres sommets constituent le corps.

1. Quels sont les nombres minimum et maximum d'arêtes d'un graphe scorpion à n sommets ?
2. Montrer que s'il existe trois sommets a, b, et c tel que $ab \in E$, $bc \in E$, $d(a) = 1$, $d(b) = 2$ et $d(c) \neq n-2$ alors le graphe n'est pas scorpion.
3. En déduire un algorithme en $O(n)$ pour reconnaître les graphes scorpions.

2 Des voyages fous, fous, fous

Soit un espace imaginaire de dimension vachement supérieure à ce qu'on connait. Dans ce monde, on peut prendre des portes magiques pour aller d'un endroit à l'autre. Bien entendu ces portes sont unidirectionelles ; pire que ça, il faut payer (des sousous, également notés $\widehat{c}$) pour les emprunter et toutes n'ont pas le même coût. On note E l'ensemble des endroits qui existent, $P = E \times E$ l'ensemble des portes menant d'un endroit à un autre, et $\widehat{c} : P \mapsto \mathbb{R}$ le prix à payer pour emprunter une porte (dans ce monde bizarre, on peut vous demander de payer $\pi\ \widehat{c}$).

Si $\mu = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un chemin, son coût $\widehat{c}(\mu)$ est $\Sigma_{i=1}^{n-1} \widehat{c}(e_i, e_{i+1})$. Le prix pour aller d'un endroit e à un autre est le prix minimal d'un chemin de e à cet endroit.

Nous sommes une agence de voyage et nous souhaitons calculer, pour un client difficile situé à l'endroit s, le nombre de $\widehat{c}$ minimum qu'il devrait débourser pour aller à n'importe quelle destination.

Exercice 2

On suppose dans cette partie que tous les prix sont positifs, bien sûr.

Question 1 On se donne un ensemble $S \subset E$ dont le prix depuis s est connu ($\widehat{c}_s$), et tel que $\forall x \notin S, \forall y \in S, \widehat{c}_s(x) \geq \widehat{c}_s(y)$.

Montrer que l'on peut calculer le prix depuis s d'au moins un endroit situé à l'extérieur de S.

Question 2 En déduire un algorithme de calcul des prix depuis un endroit.

Question 3 Quelle complexité peut-on obtenir pour cet algorithme ?

Exercice 3 On suppose que certaines portes sont tellement pourries qu'on vous paye pour que vous les empruntiez, ce qui se traduit par un coût négatif. De plus, on suppose que si vous quittez un endroit, vous ne pourrez plus y revenir (donc bien réfléchir avant de dépenser ses soussous $\widehat{c}$).

Soit s un endroit quelconque (mais est-il vraiment quelconque ?! ?) et $V \subset E$ l'ensemble des destinations de voyage où l'on peut aller depuis s.

Question 1 Montrer que si ne peut revenir à un endroit qu'on quitte, alors il existe au moins un endroit e où aucune porte ne mène. De plus, quel que soit un tel endroit e, et bien même s'il n'existait pas on ne pourrait toujours jamais revenir d'un endroit qu'on quitte.

On en déduit qu'on ne peut revenir à un endroit qu'on quitte si et seulement si il existe une permutation σ des endroits telle que pour tout $i \leq n$, il n'y a pas de nœuds entrants dans l'ensemble $\{e_{sigma1}, \cdots, e_{\sigma i}\}$, et si l'on supprime tous les endroits $e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(i)}$, on ne peut toujours pas revenir à un endroit qu'on quitte. Une telle permutation est un *tri topologique*.

Question 2 Histoire de mettre un peu d'ordre dans notre monde plein de dimensions, calculer un tri topologique de V.

Question 3 En remarquant qu'un plus court chemin de s à e passe par une porte qui mène à e (!), en déduire un algorithme de calcul des tarifs de voyages depuis s si on ne peut revenir à un endroit qu'on quitte.

Question 4 Peut-on obtenir une complexité linéaire ?

Exercice 4 On appelle *croisière vicieuse* un chemin qui revient à son point de départ et dont le prix est strictement négatif. Le danger est qu'un voyageur avare qui tombe dans une croisière vicieuse n'en sortira plus jamais, n'arrivera donc jamais à destination (ce qui nuit à notre réputation d'agence de voyage) et crée rapidement un déficit gigantesque chez les portiers qui, mécontents, font grève et plus personne ne peut se déplacer avant qu'on envoie la milice et des big blaster atomic guns.

Question 1 Montrer que le prix $\widehat{c}$ entre deux endroits quelconques est bien défini si et seulement si il n'y a pas de croisière vicieuse.

On considère que le prix du point de départ est nul : $\widehat{c}_s(s) = 0$. À chaque autre endroit e, on donne un prix éventuellement infini qui surestime le coût d'un voyage de s à e. On considère la procédure `passe` suivante :

Procedure `passe`

> **pour chaque** *porte* $p = (x, y)$ **faire**
>   **si** $\widehat{c}_s(x) + \widehat{c}(p) < \widehat{c}_s(y)$ **alors**
> $\widehat{c}_s(y) \leftarrow \widehat{c}_s(x) + \widehat{c}(p)$
>   **fin**
>   **si** $\widehat{c}_s(y) + \widehat{c}(p) < \widehat{c}_s(x)$ **alors**
> $\widehat{c}_s(x) \leftarrow \widehat{c}_s(y) + \widehat{c}(p)$
>   **fin**
> **fin**

Question 2 Supposons qu'il n'y a pas de croisière vicieuse et que les prix ne sont pas tous justes. Montrer qu'alors, après exécution de la procédure `passe` au moins un nouvel endroit reçoit le prix juste.

Question 3 En déduire un algorithme qui détecte la présence de croisière vicieuse, qui calcule les tarifs pour aller à n'importe quel endroit s'il n'y en a pas et qui envoie la milice atomique avec des bbags (mieux vaut prévenir que guérir) s'il y en a.