Examen – Probabilités

Yves Robert

Mercredi 19 Décembre 2007, 10h15-12h45

Au menu, des exercices faciles (les amusettes) puis des exercices moins faciles. Bon courage !

1 Amusettes

1.1 Roulette

Au casino, un joueur de roulette parie 1 dollar sur le rouge. S'il gagne, il s'en va. S'il perd, il rejoue 2 dollars sur le rouge, puis s'en va dans tous les cas. On suppose qu'il a une chance sur deux de gagner à chaque fois. Quelle est la probabilité qu'il rentre chez lui avec un gain ? pourquoi tout le monde ne fait-il pas comme lui ?

1.2 Markov !

Soit une chaîne de Markov $(X_0, X_1, \dots)$ de matrice de transition P. On pose $Y_n = X_{2n}$. $(Y_0, Y_1, \dots)$ est-elle une chaîne de Markov ? si oui, quelle est sa matrice de transition ?

1.3 Jeu d'échecs

1. Montrer qu'une chaîne de Markov irréductible ayant un état i tel que $P_{i,i} > 0$ est apériodique
2. Sur un échiquier, on considère un roi solitaire qui fait des mouvements aléatoires (il choisit uniformément et aléatoirement son déplacement). La chaîne de Marlov correspondante est-elle irréductible et/ou apériodique ?
3. Même question pour un fou
4. Même question pour un cavalier

1.4 Markov ?

Considérons la chaîne de Markov à trois états $\{1, 2, 3\}$ et dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pout tout n, on pose $Y_n = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } X_n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ Montrer que $(Y_0, Y_1, \dots)$ n'est pas une chaîne de Markov.

2 Choses sérieuses

2.1 Gala

n personnes vont au gala de l'ENS et déposent leur manteaux au vestiaire. Hélas, l'organisation laisse à désirer (c'est une fiction, bien sûr), et chacun récupère un des n manteaux aléatoirement.

1. On a un *accord* quand une personne récupère son propre manteau. Calculer (par exemple, par récurrence sur n) la probabilité qu'il n'y ait aucun accord. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement k accords

2. Soit X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ème personne récupère son manteau et 0 sinon. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ qui représente le nombre de personnes qui ont récupéré leur manteau. Calculer $E(S_n)$ et $Var(S_n)$
3. Montrer que $Pr(S_n \geq 11) \leq 0.01$ pour tout $n \geq 11$

2.2 Tirages successifs

Une pièce de monnaie tombe sur face F avec la probabilité p et sur pile P avec la probabilité $q = 1 - p$.

1. On la tire plusieurs fois, jusqu'au premier tirage N où on obtient FF (deux faces consécutifs - par exemple N=2 si les deux premiers tirages sont faces). Calculer l'espérance $E(N)$.
2. Maintenant on cherche le nombre de tirage M nécessaires pour obtenir pour la première fois la suite PFPPF. Calculer l'espérance $E(M)$. Comment généraliser ?

2.3 Distribution stationnaire d'une chaîne de Markov rationnelle

On considère une chaîne de Markov régulière à n états dont la matrice de transition P est à coefficients rationnels. Pour tout état i, soit a_i le PPCM des dénominateurs des coefficients non nuls dans la ligne i. Voila un algorithme dû à Engle, qui aurait mérité d'être normalien :

- Initialisation : pour tout i, mettre a_i jetons sur l'état i
- A chaque étape :
  - pour tout i, s'il y a x_i jetons sur l'état i, en envoyer $x_i p_{ij}$ vers l'état j pour tout $j \neq i$
  - pour tout i, il reste alors a'_i jetons sur l'état i. En ajouter le nombre minimal pour avoir un multiple de a_i
- Itérer jusqu'à tomber sur un nombre de jetons inchangé en chaque état

Exemple : avec 3 états, soit $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ On part avec $x = a = (4, 2, 4)$ jetons. Après la phase de distribution, on a $a' = (5, 2, 3)$ que l'on complète en $x = (8, 2, 4)$ pour la deuxième étape.

1. Quel point fixe obtient-on sur l'exemple ?
2. Montrer qu'on ne manque jamais de jetons pour effectuer les phases d'envoi
3. Montrer que le point fixe est un multiple du vecteur π de distribution stationnaire