# Partiel

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées. Le correcteur s'intéressera à la justification de chaque réponse, puis à la concision.

## Exercice 1 YouTube, don't you ?

Je viens d'ajouter 50 secondes aux 130 ans de longueur totale de vidéos sur YouTube. Comme ma vidéo ne fait pas beaucoup parler d'elle[1], le temps $T$ entre deux visites suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On ne dispose que d'une précision à la seconde sur les dates des visites, le temps $X$ entre deux visites est donc discrétisé à un nombre entier de secondes. On supposera que cette discrétisation est faite par troncature (ou partie entière) : $X = \lfloor T \rfloor$. Exprimer le plus simplement possible la loi de la v.a. entière $X$.

**Solution**

Soit $F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ la fonction de répartition de $T$.

$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\lfloor T \rfloor = k) = \mathbb{P}(k \leqslant T < k+1) = F_T(k+1) - F_T(k) = \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} = \mathrm{e}^{-\lambda k}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$

On reconnaît (comme dans 2 des copies) une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

*Remarque.* Attention à ne pas confondre fonction de répartition et fonction de densité. Puisque $T$ est continue, $\mathbb{P}(T = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

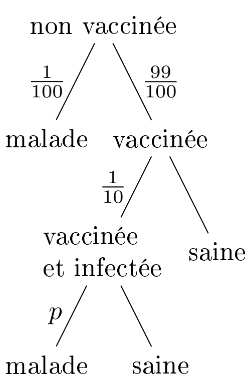
## Exercice 2

Une nouvelle maladie se répand et l'on estime que chaque personne a une chance sur 10 d'être infectée. Il n'y a pas de porteur sain : une personne non vaccinée infectée tombe malade. On est en train de mettre au point un vaccin, mais il a deux défauts :

– vacciner une personne a 1 chance sur 100 de la rendre malade ;
– une personne vaccinée puis infectée a encore une probabilité $p$ de tomber malade.

Quelle doit-être l'efficacité du vaccin (i.e. que doit valoir $p$) pour qu'il soit intéressant de se faire vacciner ? On suppose que la vaccination se fait toujours avant l'éventuelle infection.

**Solution**




Une personne non vaccinée a 1 chance sur 10 de tomber malade.

Une personne vaccinée a 1 chance sur 100 de tomber malade avant d'être infectée, sinon (dans les 99 cas sur 100 restants) elle a 1 chance sur 10 d'être infectée puis une probabilité $p$ de tomber malade.

La probabilité de tomber malade pour une personne vaccinée est donc $1/100 + 99/100 \times 1/10 \times p$. On cherche donc à ce que

$$\frac{1}{100} + \frac{99}{100}\frac{1}{10}p < \frac{1}{10}$$

Ce qui est équivalent à

$$p < \frac{10}{11}$$

Avec ces probabilités imaginaires (et en l'absence d'effets secondaires, de coût prohibitif ou autre), le vaccin n'a pas besoin d'être très efficace pour être « pas complètement inutile ».

*Remarque.* Être tombé malade à cause du vaccin n'empêche pas de se faire éventuellement infecter.

## Exercice 3 Mettre tous ses œufs dans le même panier

Carole et Ted[2] veulent s'envoyer un paquet de valeur $v$, qui a une probabilité $p$ d'être perdu. Carole peut décider de découper son envoi en $n$ paquets égaux et les envoyer indépendamment. Comparer l'espérance et l'écart type des deux solutions.

**Solution** La première solution correspond à une v.a. de Bernoulli de paramètre $1 - p$, multipliée par $v$. L'espérance est donc $v(1-p)$ et l'écart-type $v\sqrt{p(1-p)}$.

La seconde correspond à une v.a. de loi binomiale de paramètres $(n, p)$, multipliée par $\frac{v}{n}$. L'espérance est donc $np\frac{v}{n} = vp$, inchangée. L'écart-type est $\sqrt{np(1-p)}\frac{v}{n}$, ce qui est $\sqrt{n}$ fois plus petit que le précédent.

## Exercice 4 Espace $L^r$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive de densité $f_X$.

[1] jusqu'ici tout est vrai et sans aucune importance pour l'exercice
[2] les époux d'Alice et Bob dans le film de Paul Mazurskya

▷ 1. Montrer que si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ est finie alors $\mathbb{E}\left(X\right)$ est finie (ou bien répondre à la question 2 tout de suite).

▷ 2. Plus généralement, montrer que si $r \geqslant s \geqslant 1$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right) < +\infty$ alors $\mathbb{E}\left(X^s\right) < +\infty$.

**Solution**

▷ 1. Poser $r = 2$ et $s = 1$ dans la question suivante.

▷ 2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^s\right) &= \int_{\mathbb{R}^+} x^s f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^s f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^s f_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or $x^s \leqslant 1$ sur $[0;1]$ et $x^s \leqslant x^r$ sur $[1;+\infty]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^s\right) &\leqslant \int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^r f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^\infty f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x^r f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \mathbb{E}\left(X^r\right) < +\infty\end{aligned}$$

*Remarques.* On note $L^r$ l'ensemble des v.a. dont la valeur absolue est de puissance $r^{\mathrm{e}}$ intégrable. $f_X$ n'est pas nécessairement bornée (cf. exercice 6). On sait seulement que $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$.

## Exercice 5

Un nouveau jeu télévisé pose des questions à un candidat tant qu'il répond juste. La première question vaut 1 point, chaque question lui rapporte deux fois plus de points que la précédente.

▷ 1. On suppose le candidat imperturbable : à chaque question il répond juste avec probabilité $p$ ($p < 1$). Calculer l'espérance du nombre de questions $Q$ auxquelles il répond juste et l'espérance du nombre total de points $N$ qu'il va gagner.

* ▷ 2. On suppose à la place que le candidat prend confiance en lui au fur et à mesure du jeu, mais se fatigue en même temps. La probabilité qu'il réponde juste à la $k^{\mathrm{e}}$ question est égale à $\frac{\alpha}{k}$ fois la probabilité qu'il réponde juste à la question précédente. Calculer l'espérance de $Q$ et de $N$ dans ce nouveau modèle.

▷ 3. On suppose cette fois que la probabilité qu'il réponde juste à au moins $k$ questions est $\frac{\alpha}{k}$ fois la probabilité qu'il réponde à au moins $(k-1)$ questions ($\alpha < 1$). En notant $g(k)$ le nombre de points que vaut la $k^{\mathrm{e}}$ question, montrer que $\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{k\geqslant 1} g(k)\mathbb{P}\left(Q \geqslant k\right)$. Calculer $\mathbb{E}\left(Q\right)$ et $\mathbb{E}\left(N\right)$.

**Solution** Si le candidat répond juste à $i$ questions il gagne $2^i - 1$ points.

▷ 1. $Q+1$ suit une loi géométrique de paramètre $1-p$. $\mathbb{E}\left(Q\right) = \mathbb{E}\left(Q+1\right) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}$.
Autre méthode : $\mathbb{E}\left(Q\right) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\left(Q \geqslant k\right) = \sum_{k=1}^\infty p^k = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}$.

$N = 2^Q - 1$.
$\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{q=0}^\infty (2^q - 1)\mathbb{P}\left(Q = q\right) = \sum_{q=0}^\infty 2^q p^q (1-p) - \sum \mathbb{P}\left(Q = q\right) = \begin{cases}(1-p)\frac{1}{1-2p} - 1 = \frac{p}{1-2p} & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } p \geqslant \frac{1}{2}\end{cases}$.

*Remarque.* Un tableau des premières valeurs aide à éviter tout décalage d'une unité :

| $q$ | 0 | 1 | 2 | $q$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}\left(Q = q\right)$ | $1-p$ | $p(1-p)$ | $p^2(1-p)$ | $p^q(1-p)$ |
| points pour la $q^{\mathrm{e}}$ question | 0 | $2^0$ | $2^1$ | $2^{q-1}$ si $q \geqslant 1$ |
| $N$ si $Q = q$ | 0 | 1 | 3 | $2^q - 1$ |

▷ 2. $\mathbb{P}\left(Q = k\right) = \frac{\alpha}{k}\mathbb{P}\left(Q = k-1\right) = \frac{\alpha^k}{k!}\mathbb{P}\left(Q = 0\right)$. On reconnaît une loi de poisson de paramètre $\alpha$, donc $\mathbb{P}\left(Q = 0\right) = \mathrm{e}^{-\alpha}$ et $\mathbb{E}\left(Q\right) = \alpha$.
$\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{q=0}^\infty (2^q - 1)\mathbb{P}\left(Q = q\right) = \sum_{q\geqslant 0} 2^q \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\alpha^q}{q!} - 1 = \mathrm{e}^{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha} - 1 = \mathrm{e}^{\alpha} - 1$.
*Remarque.* Sans reconnaître une loi de poisson, on peut déterminer $\mathbb{P}\left(Q = 0\right)$ grâce à $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(Q = k\right) = 1$.

▷ 3. $\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=1}^k g(i)\right)\mathbb{P}\left(Q = k\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant\infty} g(i)\mathbb{P}\left(Q = k\right) = \sum_{i\geqslant 1} g(i)\mathbb{P}\left(Q \geqslant i\right)$

$\mathbb{P}(Q \geqslant k) = \frac{\alpha}{k}\mathbb{P}(Q \geqslant k-1) = \frac{\alpha^k}{k!}\underbrace{\mathbb{P}(Q \geqslant 0)}_{1}$

Donc $\mathbb{E}(Q) = \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(Q \geqslant k) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\alpha^k}{k!} = \mathrm{e}^{\alpha} - 1$

$\mathbb{E}(N) = \sum_{k \geqslant 1} g(k)\mathbb{P}(Q \geqslant k) = \sum_{k \geqslant 1} 2^{k-1}\frac{\alpha^k}{k!} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\alpha} - 1)$.

## Exercice 6

Soit $U$ une variable de loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $X := U^2$.

▷ 1. Calculer la densité $f_X$ de $X$.

▷ 2. Soit Y indépendante et de même loi que $X$ (par exemple, soit $V$ indépendante de $U$ de loi uniforme sur $[0;1]$ et $Y = V^2$). Combien vaut $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ ?

* ▷ 3. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant t \mid X \leqslant Y)$.

**Solution**

▷ 1. $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(U^2 \leqslant x\right) = \mathbb{P}(U \leqslant \sqrt{x})$ (car $U \geqslant 0$).

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Donc $f_X = \frac{d}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

▷ 2. Par symétrie, $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \mathbb{P}(Y \leqslant X)$. Or $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \frac{1}{2}$.

▷ 3. Soit $t \in [0;1]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leqslant t \mid X \leqslant Y) &= \frac{\mathbb{P}(X \leqslant Y \leqslant t)}{\mathbb{P}(X \leqslant Y)} = 2\mathbb{P}(X \leqslant Y \leqslant t) \\
&= 2\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \mathbb{1}(x \leqslant y \leqslant t)\, f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{y=0}^{t}\underbrace{\int_{x=0}^{y} f_X(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathbb{P}(X \leqslant y) = \sqrt{y} \text{ car } y \in [0;1]} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_{y=0}^{t}\sqrt{y}\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \\
&= t
\end{aligned}$$

On reconnaît une loi uniforme : sachant que $Y \geqslant X$, $Y$ est une v.a. uniforme sur $[0;1]$.

## Exercice 7 (*) Génération uniforme

On considère l'algorithme suivant pour générer un mot sur l'alphabet $\{a,b\}$ ayant $p$ « a » et $q$ « b ».

```
Données: p, q
n_a := 0;
for i = 0 to p + q − 1 do
    if random(p + q − i) < p − n_a then
        resultat[i] :='a'; n_a++
    else resultat[i] :='b'
return resultat
```

Montrer proprement que le tirage est uniforme, c'est-à-dire que tous les mots ayant $p$ 'a' et $q$ 'b' ont la même probabilité d'être générés par l'algorithme. (La fonction random$(n)$ renvoie un entier de $[\![0,\, n-1]\!]$).

**Solution** Soit $n := p + q$ et un mot $m = m_0 \dots m_{n-1}$ ayant p 'a' et q 'b'. Soient $A := \{i \mid m_i = a\} =: \{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p\}$ et $B := \{j \mid m_j = b\} =: \{j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_q\}$. Enfin, soient $X = X_0 \dots X_{n-1}$ la v.a. représentant le mot généré par l'algoritme.

On remarque $A \cup B = [\![0,\, n-1]\!]$ ($A$ et $B$ disjoints). À la fin de la boucle $i$ de l'algorithme, $n_a = |A \cap [\![0,\, i]\!]|$ (c'est le nombre de $a$ placés jusqu'ici). On a donc tiré un 'b' avec probabilité $\frac{p+q-i-p+n_a}{p+q-i} = \frac{q-n_b}{p+q-i}$ où $n_b = |B \cap [\![0,\, i]\!]|$ est le nombre de 'b' placés jusqu'ici.

$\mathbb{P}(X = m) =$

$\mathbb{P}(X_0 = m_0)\,\mathbb{P}(X_1 = m_1 \mid X_0 = m_0)\ldots\mathbb{P}(X_{n-1} = m_{n-1} \mid X_0 \ldots X_{n-2} = m_0 \ldots m_{n-2})$

$= \frac{p}{p+q-i_1}\frac{p-1}{p+q-i_2}\cdots\frac{1}{p+q-i_p} \times \frac{q}{p+q-j_1}\frac{q-1}{p+q-j_2}\cdots\frac{1}{p+q-j_q} = \frac{p!q!}{(p+q)!} = 1/C_{p+q}^{p}$. Or il y a bien $C_{p+q}^{p}$ mots ayant $p$ 'a' et $q$ 'b'.

*Remarques.* Les $X_i$ ne sont pas indépendants : quand on tire un 'a' on a moins de chances d'en tirer un nouveau.