Partiel

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées. Le correcteur s'intéressera à la justification de chaque réponse, puis à la concision.

Exercice 1 YouTube, don't you ?

Je viens d'ajouter 50 secondes aux 130 ans de longueur totale de vidéos sur YouTube. Comme ma vidéo ne fait pas beaucoup parler d'elle[1], le temps T entre deux visites suit une loi exponentielle de paramètre λ. On ne dispose que d'une précision à la seconde sur les dates des visites, le temps X entre deux visites est donc discrétisé à un nombre entier de secondes. On supposera que cette discrétisation est faite par troncature (ou partie entière) : $X = \lfloor T \rfloor$. Exprimer le plus simplement possible la loi de la v.a. entière X.

Exercice 2

Une nouvelle maladie se répand et l'on estime que chaque personne a une chance sur 10 d'être infectée. Il n'y a pas de porteur sain : une personne non vaccinée infectée tombe malade. On est en train de mettre au point un vaccin, mais il a deux défauts :

- vacciner une personne a 1 chance sur 100 de la rendre malade ;
- une personne vaccinée puis infectée a encore une probabilité p de tomber malade.

Quelle doit-être l'efficacité du vaccin (i.e. que doit valoir p) pour qu'il soit intéressant de se faire vacciner ? On suppose que la vaccination se fait toujours avant l'éventuelle infection.

Exercice 3 Mettre tous ses œufs dans le même panier

Carole et Ted[2] veulent s'envoyer un paquet de valeur v, qui a une probabilité p d'être perdu. Carole peut décider de découper son envoi en n paquets égaux et les envoyer indépendamment. Comparer l'espérance et l'écart type des deux solutions.

Exercice 4 Espace L^r

Soit X une variable aléatoire réelle positive de densité f_X.

▷ 1. Montrer que si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ est finie alors $\mathbb{E}(X)$ est finie (ou bien répondre à la question 2 tout de suite).

▷ 2. Plus généralement, montrer que si $r \geqslant s \geqslant 1$ et $\mathbb{E}(X^r) < +\infty$ alors $\mathbb{E}(X^s) < +\infty$.

Exercice 5

Un nouveau jeu télévisé pose des questions à un candidat tant qu'il répond juste. La première question vaut 1 point, chaque question lui rapporte deux fois plus de points que la précédente.

▷ 1. On suppose le candidat imperturbable : à chaque question il répond juste avec probabilité p ($p < 1$). Calculer l'espérance du nombre de questions Q auxquelles il répond juste et l'espérance du nombre total de points N qu'il va gagner.

* ▷ 2. On suppose à la place que le candidat prend confiance en lui au fur et à mesure du jeu, mais se fatigue en même temps. La probabilité qu'il réponde juste à la k^{e} question est égale à $\frac{\alpha}{k}$ fois la probabilité qu'il réponde juste à la question précédente. Calculer l'espérance de Q et de N dans ce nouveau modèle.

▷ 3. On suppose cette fois que la probabilité qu'il réponde juste à au moins k questions est $\frac{\alpha}{k}$ fois la probabilité qu'il réponde à au moins $(k-1)$ questions ($\alpha < 1$). En notant $g(k)$ le nombre de points que vaut la k^{e} question, montrer que $\mathbb{E}(N) = \sum_{k \geqslant 1} g(k)\mathbb{P}(Q \geqslant k)$. Calculer $\mathbb{E}(Q)$ et $\mathbb{E}(N)$.

Exercice 6

Soit U une variable de loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $X := U^2$.

▷ 1. Calculer la densité f_X de X.

▷ 2. Soit Y indépendante et de même loi que X (par exemple, soit V indépendante de U de loi uniforme sur $[0;1]$ et $Y = V^2$). Combien vaut $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$?

* ▷ 3. Calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant t \,|\, X \leqslant Y)$.

[1] jusqu'ici tout est vrai et sans aucune importance pour l'exercice

[2] les époux d'Alice et Bob dans le film de Paul Mazurskya

Exercice 7 (*) Génération uniforme

On considère l'algorithme suivant pour générer un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$ ayant p « a » et q « b ».

Données: p, q
$n_a := 0$;
for $i = 0$ **to** $p + q - 1$ **do**
  if random$(p + q - i) < p - n_a$ **then**
    resultat$[i]$:='a' ; n_a++
  else resultat$[i]$:='b'
return resultat

Montrer proprement que le tirage est uniforme, c'est-à-dire que tous les mots ayant p 'a' et q 'b' ont la même probabilité d'être générés par l'algorithme. (La fonction random(n) renvoie un entier de $[\![0,\ n-1]\!]$).