

# Générations

## Exercice 1

Dans une population, chaque adulte mâle (qui a un nom donné) aura un certain nombre d'enfants mâles qui atteindront l'âge adulte. Soit  $X$  la variable aléatoire qui représente ce nombre. La probabilité d'avoir  $0, 1, 2, 3, \dots$  est  $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ . S'il y a  $k$  telles naissances à la première génération, il y en aura  $X_1 + X_2 + \dots + X_k$  à la deuxième génération. On cherche à étudier la probabilité avec laquelle un nom s'éteint, et ce au bout de combien de générations.

- ▷ 1. Construire un arbre donnant le nombre de telles naissances à la deuxième génération avec leur probabilité pour  $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4$ .
- ▷ 2. Soit  $d_m$  la probabilité que le processus s'éteigne à la  $m^e$  génération et  $d = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$ . Montrer que  $0 \leq d \leq 1$ .
- ▷ 3. Soit  $h$  la fonction génératrice pour les  $p_i$ , montrer que  $d_m = h(d_{m-1})$ . En déduire que déterminer la probabilité qu'un nom s'éteint revient à étudier l'intersection des courbes des fonctions  $y = z$  et  $y = h(z)$ .
- ▷ 4. Faites cette étude. En déduire que si en moyenne, chaque parent a  $m \leq 1$  *bonnes* naissances, alors  $d = 1$  et un nom disparaît à coup sûr, sinon,  $d < 1$  et un nom disparaît avec une probabilité  $d$ .
- ▷ 5. Supposons que le maximum de *bonnes* naissances est 2,  $i$  *bonnes* naissances arrivant avec la probabilité  $p_i$ . Donner les valeurs possibles de  $d$  et le nombre moyen de naissance par adulte mâle  $m$  en fonction des  $p_i$ . En déduire la condition sur les  $p_i$  pour qu'un nom s'éteigne avec une probabilité inférieure à 1.

## Exercice 2

En 1978, une chaîne postale a consisté à acheter une lettre de 12 (par exemple) noms. Supposons que l'acheteur donne 50\$ au vendeur, et 50\$ à la personne dont le nom est inscrit en haut de la liste. L'acheteur barre ce nom et ajoute son propre nom à la fin de la liste et la revend.

- ▷ 1. Si on revend la liste qu'à une seule personne, quelle est notre espérance de gain ?
- ▷ 2. En imaginant que chaque personne revend la liste à 0, 1 ou 2 personnes avec une certaine probabilité, quelle est notre espérance de gain ?
- ▷ 3. Quelle condition doit respecter  $m$  l'espérance du nombre de lettres que vous avez envoyé pour que ce processus vous soit favorable ?
- ▷ 4. Supposons maintenant qu'il n'y a aucune limite sur le nombre de personnes à qui on revend la liste. Cependant, supposons que chaque personne connaît un grand nombre  $N$  d'acheteurs potentiels mais que la probabilité  $p$  de leur vendre la liste est petite. Donner une approximation de  $p_j$  la probabilité de vendre la lettre à  $j$  personnes.