

Génération

Exercice 1

Dans une population, chaque adulte mâle (qui a un nom donné) aura un certain nombre d'enfants mâles qui atteindront l'âge adulte. Soit X la variable aléatoire qui représente ce nombre. La probabilité d'avoir $0, 1, 2, 3, \dots$ est $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$. S'il y a k telles naissances à la première génération, il y en aura $X_1 + X_2 + \dots + X_k$ à la deuxième génération. On cherche à étudier la probabilité avec laquelle un nom s'éteint, et ce au bout de combien de générations.

- ▷ 1. Construire un arbre donnant le nombre de telles naissances à la deuxième génération avec leur probabilité pour $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4$.
- ▷ 2. Soit d_m la probabilité que le processus s'éteigne à la m^e génération et $d = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$. Montrer que $0 \leq d \leq 1$.
- ▷ 3. Soit h la fonction génératrice pour les p_i , montrer que $d_m = h(d_{m-1})$. En déduire que déterminer la probabilité qu'un nom s'éteint revient à étudier l'intersection des courbes des fonctions $y = z$ et $y = h(z)$.
- ▷ 4. Faites cette étude. En déduire que si en moyenne, chaque parent a $m \leq 1$ *bonnes* naissances, alors $d = 1$ et un nom disparaît à coup sûr, sinon, $d < 1$ et un nom disparaît avec une probabilité d .
- ▷ 5. Supposons que le maximum de *bonnes* naissances est 2, i *bonnes* naissances arrivant avec la probabilité p_i . Donner les valeurs possibles de d et le nombre moyen de naissance par adulte mâle m en fonction des p_i . En déduire la condition sur les p_i pour qu'un nom s'éteigne avec une probabilité inférieure à 1.

Exercice 2

En 1978, une chaîne postale a consisté à acheter une lettre de 12 (par exemple) noms. Supposons que l'acheteur donne 50\$ au vendeur, et 50\$ à la personne dont le nom est inscrit en haut de la liste. L'acheteur barre ce nom et ajoute son propre nom à la fin de la liste et la revend.

- ▷ 1. Si on revend la liste qu'à une seule personne, quelle est notre espérance de gain ?
- ▷ 2. En imaginant que chaque personne revend la liste à 0, 1 ou 2 personnes avec une certaine probabilité, quelle est notre espérance de gain ?
- ▷ 3. Quelle condition doit respecter m l'espérance du nombre de lettres que vous avez envoyé pour que ce processus vous soit favorable ?
- ▷ 4. Supposons maintenant qu'il n'y a aucune limite sur le nombre de personnes à qui on revend la liste. Cependant, supposons que chaque personne connaît un grand nombre N d'acheteurs potentiels mais que la probabilité p de leur vendre la liste est petite. Donner une approximation de p_j la probabilité de vendre la lettre à j personnes.