

Questions existentielles

La méthode probabiliste

Exercice 1 Comptage

On note K_n le graphe complet à n sommets. Une **clique** est un sous-graphe complet. Soit C le nombre de cliques à k sommets, on les numérote de 1 à C .

- ▷ 1. On colorie chaque arête de K_n indépendamment, avec probabilité $1/2$ pour chacune des deux couleurs. Quelle est la probabilité de l'événement A_i « la i^{e} clique est monochromatique. » ?
- ▷ 2. On suppose dans le reste de l'exercice que $\frac{C_n^k}{2^{C_k^2-1}} < 1$ et $k \geq 3$. Montrer qu'alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^C A_i\right) < 1$.
- ▷ 3. En déduire qu'il existe un 2-coloriage de K_n tel qu'il n'y ait pas de clique monochromatique de taille k .

Exercice 2 Espérance

Une **coupe** d'un graphe est une partition des sommets en deux ensembles A et B . Le **poids** d'une coupe est le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans A et l'autre dans B .

- ▷ 1. (*lemme*) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire d'espérance μ . Montrer que $\mathbb{P}(X \geq \mu) > 0$ et $\mathbb{P}(X \leq \mu) > 0$.
- ▷ 2. On affecte indépendamment chaque sommet à A ou B avec probabilité $\frac{1}{2}$. Soit C le poids de la coupe obtenue. Calculer $\mathbb{E}(C)$.
- ▷ 3. En déduire qu'il existe une coupe de poids au moins $\frac{m}{2}$ où m est le nombre d'arêtes.

Exercice 3 Dérandomisation par espérance conditionnelle

On garde les notations de l'exercice précédent. Soit p la probabilité d'obtenir une coupe de poids au moins $\frac{m}{2}$ par le tirage précédent.

- ▷ 1. Montrer que $\frac{1}{p} = O(m)$ (i.e. minorer p).
- ▷ 2. En déduire un algorithme pour trouver une telle coupe dont l'espérance du temps de calcul est $O(m^2)$.
- ▷ 3. On cherche maintenant un algorithme déterministe. On note les sommets s_1, \dots, s_n . Soit X_i l'ensemble auquel est affecté s_i (X_i est donc une variable aléatoire qui vaut A ou B). Montrer que $\mathbb{E}(C | X_1) = \mathbb{E}(C)$.
- ▷ 4. Supposons X_1, \dots, X_k fixés. Montrer que l'on peut choisir $x \in \{A, B\}$ de façon à ce que

$$\mathbb{E}(C | X_1, \dots, X_k, X_{k+1} = x) \geq \mathbb{E}(C | X_1, \dots, X_k).$$
- ▷ 5. En déduire un algorithme déterministe qui fixe les valeurs de X_1, \dots, X_n , tel que $\mathbb{E}(C | X_1, \dots, X_n) \geq \mathbb{E}(C)$.
- ▷ 6. Exprimer $\mathbb{E}(C | X_1, \dots, X_k, X_{k+1} = A) - \mathbb{E}(C | X_1, \dots, X_k, X_{k+1} = B)$ en fonction des voisins de v_{k+1} et donner une description simple l'algorithme précédent.

Exercice 4 Sample and modify

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes, et $d := 2m/n$ le degré moyen de G . Un **stable** est un sous-ensemble des sommets ne contenant pas deux sommets voisins. On considère l'algorithme probabiliste suivant pour trouver un stable :

- Supprimer chaque sommet (et ses arêtes adjacentes) indépendamment avec probabilité $1 - \frac{1}{d}$.
- Supprimer chaque arête restante et supprimer l'une de ses extrémités.

- ▷ 1. Montrer que l'on obtient bien un stable.
- ▷ 2. Calculer l'espérance du nombre X de sommets à la fin de la première étape.
- ▷ 3. Calculer l'espérance du nombre Y d'arêtes à la fin de la première étape.
- ▷ 4. En déduire qu'il existe un stable de taille au moins $\frac{n^2}{4m}$.

Remarque. Trouver un stable de taille maximale est NP-complet.