Urnes avec renforcement

Voici un problème formalisé avec des urnes, mais il est utile par exemple pour résoudre une marche aléatoire dans une grille finie carrée, ou pour modéliser une situation économique où deux marques sont en concurrence, et où les acheteurs ont plus tendance à choisir la marque dominante.

Exercice 1 L'urne de Polya

On considère une urne avec initialement une boule blanche et une boule noire. On répète alors l'opération suivante : tirer une boule, la remettre, ajouter une boule de la même couleur. On s'intéresse au nombre de boules blanches et noires après n tirages, et au comportement asymptotique.

▷ 1. Décrire avec les mains le comportement qui semble intuitif.

▷ 2. Modéliser par une chaîne de Markov et faire un dessin.

▷ 3. Combien y a-t-il de chemins menant à la configuration « n boules dont k noires » ?

▷ 4. Quelle est la probabilité de chaque chemin ?

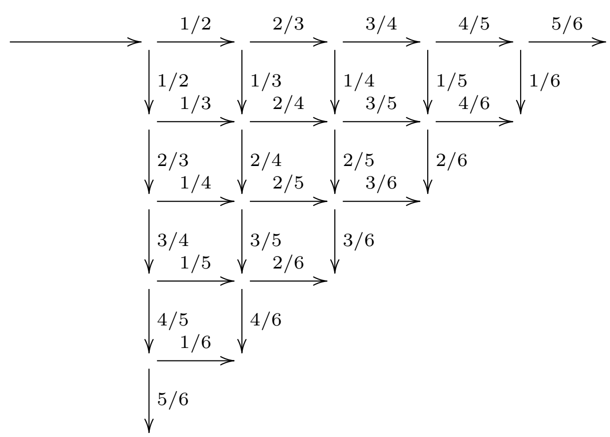
▷ 5. Conclure.

Solution

▷ 1. On peut imaginer que le renforcement de la couleur dominante conduise à un gros déséquilibre.

▷ 2. On considère une chaîne de Markov dans $(\mathbb{N}^*)^2$, l'état (i, j) représente l'état où il y a i boules blanches et j boules noires dans l'urne.

nombre de boules blanches :	1	2	3	4	5	6



▷ 3. On ajouté $n-2$ boules, parmi lesquelles $k-1$ noires. Il y a donc C_{n-2}^{k-1} chemins.

▷ 4. Si l'on fait le produit des probabilités rencontrée le long d'un chemin, on trouve au dénominateur tous les entiers de 2 à $n-1$. Le numérateur est aussi identique sur chaque chemin. La probabilité est $\frac{(k-1!)(n-2-(k-1))!}{(n-1!)} = \frac{1}{n-1}(C_{n-2}^{k-1})^{-1}$.

▷ 5. La probabilité d'arriver à la configuration « n boules dont k noires » est donc $\frac{1}{n-1}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. La probabilité plus grande d'ajouter une boule de la couleur dominante est exactement compensée par le plus grand nombre de chemins parvenant à une configuration équilibrée.

Exercice 2 Généralisation

▷ 1. *(Changement de modèle)* Décrire un modèle équivalent avec deux urnes et seulement des boules blanches. On notera x et y le nombre de boules dans chacune des deux urnes.

▷ 2. *(Encore un changement de modèle)* On considère deux urnes et des boules blanches. Montrer que, quand on fixe le nombre total de boules ajoutées, le nombre de boules dans l'urne 1 a la même loi dans les deux modèles suivants :

1. Temps t continu, les deux urnes vides au départ évoluent indépendamment. Chaque urne reçoit une boule à $t = 0$. Chaque fois que l'urne 1 reçoit une boule, on attend un temps T_x puis on lui ajoute une boule. T_x est une variable aléatoire de loi exponentielle avec paramètre x^p (x est toujours le nombre de boules de l'urne 1). On fait de même pour l'urne 2 avec une v.a. U_y.

2. Temps discret. À chaque étape on ajoute une boule à l'une des deux urnes. La probabilité que ce soit l'urne 1 est $\frac{x^p}{x^p+y^p}$.

▷ 3. Faire le lien avec la question 1 de cet exercice.

▷ 4. On se place désormais dans le cas $p > 1$. Soit $S_1 := \sum_{x=1}^{\infty} T_x$. Montrer que presque sûrement $S_1 < \infty$.

▷ 5. Donner une interprétation en français de S_1.

▷ 6. On définit S_2 de façon analogue pour l'urne 2. Montrer que presque sûrement $S_1 \neq S_2$.

▷ 7. Supposons $S_1 < S_2$, donner une relation (avec quantificateurs sur n et m) entre $\sum_{x=1}^{m} T_x$ et $\sum_{y=1}^{n} U_y$.

▷ 8. Faire une conclusion intéressante.

Solution

▷ 1. Chaque fois que l'on ajoute une boule, elle est dirigée vers l'urne 1 avec probabilité $\frac{x}{x+y}$.

▷ 2. La loi exponentielle est sans mémoire, on peut donc considérer que chaque fois que l'on ajoute une boule, on refait le tirage des v.a. T_x et U_y. La prochaine boule que l'on ajoute est donc dirigée vers l'urne 1 si et seulement si $T_x < U_y$, ce qui arrive avec probabilité $\frac{x^p}{x^p+y^p}$.

▷ 3. C'est le cas particulier $p = 1$.

▷ 4. $\mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}\left(\sum_{x=1}^{\infty} T_x\right) = \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{E}(T_x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^p} < \infty$ (l'échange sommme / espérance est licite grâce à la convergence absolue de la somme). Donc $\mathbb{P}(S_1 = \infty) = 0$.

▷ 5. S_1 est le « temps de saturation », ou le temps au bout duquel l'urne 1 a reçu une infinité de boules.

▷ 6. Si $(T_x)_{x\geqslant 2}$ et $(U_y)_{y\geqslant 1}$ sont fixés, pour que $S_1 = S_2$, il faut que $T_1 = \sum_{y=1}^{\infty} U_y - \sum_{x=2}^{\infty} T_x$, ce qui arrive avec probabilité 0.

▷ 7. $\exists n \quad \forall m \quad \sum_{x=1}^{m} T_x < \sum_{y=1}^{n} U_y$.

▷ 8. La relation précédente signifie que l'urne 1 recevra une infinité de boules avant que l'urne 2 ne reçoive sa n^{e} boule. En d'autres termes, il existe $k < n$ tel qu'une fois que l'urne 2 a reçu sa k^{e} boule, toutes les boules suivantes vont dans l'urne 1.
En revenant au premier modèle (toujours avec $p > 1$), cela signifie que presque sûrement il existe k (différent à chaque expérience) tel qu'une fois que l'on a mis k boules dans une urne, toutes les boules vont dans l'autre urne. En terme de marché, ce modèle prédit que l'un des deux concurrents va avoir un nombre fini de clients, puis tous les clients iront chez l'autre. Il n'y a pas d'intermédiaire entre $p = 1$ (toutes les distributions équiprobables) et $p > 1$ (monopole absolu). Le modèle est donc un peu grossier pour modéliser un marché...