# Probabilités conditionnelles, lois continues

## 1 Géopolitique des indépendants

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché (et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon).

### Exercice 1

Montrer que les événements suivants sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants :
- l'héritier d'Aquitaine est un garçon ;
- l'héritier de Bourgogne est un garçon ;
- les deux héritiers sont de même sexe.

**Solution**

Notons $A$ l'évènement « l'héritier d'Aquitaine est un garçon », $B$l'évènement « l'héritier de Bourgogne est un garçon » et $C$ l'évènement « les deux héritiers sont de même sexe ».

L'évènement $A \cap B \cap C$ est égal à l'évènement $A \cap B$. $A$ et $B$ étant supposés indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Donc $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B) = 1/4$. Or $P(A)P(B)P(C) = 1/8$. Les trois évènements ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Indépendance deux à deux : c'est vrai pour $A$ et $B$ par hypothèse. Montrons le par exemple pour $B$ et $C$, le cas $A$ et $C$ est symétrique. La seule possibilité pour avoir $B$ et $C$ est que les deux soient des garçons. On a donc $P(B \cap C) = 1/4$, ce qui est égal à $P(B)P(C)$.

*N.B.* : En supposant qu'il y a des filles et des garçons, ce résultat n'est vrai que si la naissance d'une fille et d'un garçon sont équiprobables. Si, à l'inverse, la probabilité d'avoir un garçon est $p$ tandis que celle d'avoir une fille est $1-p$, on obtient : $P(B \cap C) = p^2$ et $P(B) \times P(C) = p \times (p^2 + (1-p)^2)$. Les deux ne sont égaux que si $2p^3 - 3p^2 + p = 0$, i.e. soit il n'y a que des filles ($p = 0$), soit que des garçons ($p = 1$), soit $p = \frac{1}{2}$.

Le président des États-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne 4 ans.

### Exercice 2

En supposant exacte cette estimation et sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre minimal de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0,95.

**Solution**

En notant $P(X \leqslant x)$ la probabilité pour que la durée de la crise soit inférieure à $x$ années, on cherche $x$ vérifiant $P(X \leqslant x) \leqslant 0,95$. Or $P(X \leqslant x) = F(x)$ avec $F'(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$ (sur $\mathbb{R}^+$) car la crise suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans. Puisque $\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$, $F(x) = 1 - e^{-x/4}$. On obtient donc $x \simeq 11,98$. Le nombre de boîtes à acheter est finalement $\lceil \frac{11,98 \times 365,25 \times 2}{500} \rceil = 18$ boîtes.

## 2 Côa

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques indépendantes[1] :
- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

### Exercice 3

La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminer le temps le plus probable.

**Solution**

Notons de la façon suivante les différents évènements :
- $B$ : Il fait beau.
- $M$ : La météo a raison.
- $G$ : La grenouille a raison.
- $A$ : La météo prévoit de la pluie tandis que la grenouille prévoit du beau temps.

[1] La météo nationale n'utilise pas de grenouilles

La formule de Bayes nous permet d'affirmer :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

Or $P(A|B) = \frac{2}{100} \times \frac{19}{20} = \frac{38}{2000}$ et $P(A|\overline{B}) = \frac{98}{100} \times \frac{1}{20} = \frac{98}{2000}$. Donc

$$P(B|A) = \frac{38 \times 7}{38 \times 7 + 98 \times 3} = 0,475.$$

Le plus probable est donc qu'il fasse mauvais.

Autre méthode : Il y a huit cas : il fait beau ou non, la grenouille a raison ou non, la météo a raison ou non. Mais parmi ces cas il n'y a que deux possibilités car on connaît les prédictions de la météo et de la grenouille. On veut donc comparer $P(B \cap \overline{M} \cap G)$ et $P(\overline{B} \cap M \cap \overline{G})$. Or par indépendance $P(B \cap \overline{M} \cap G) = \frac{7}{10}\frac{2}{100}\frac{19}{20} = \frac{133}{10\,000}$ et $P(\overline{B} \cap M \cap \overline{G}) = \frac{3}{10}\frac{98}{100}\frac{1}{20} = \frac{147}{10\,000}$.
Donc il est plus probable qu'il fasse mauvais.

### Exercice 4

Le club astro a invité toute la Rez à observer le ciel pour la nuit des étoiles filantes. On suppose que cette fois il fait beau. Le temps T qui sépare le passage de deux étoiles filantes suit une loi exponentielle de moyenne 2 minutes. Sachant que l'on vient de scruter le ciel en vain pendant une minute, déterminer la loi de probabilité de la variable X égale au temps qu'il faut encore attendre avant de voir une étoile filante.

**Solution**

Par hypothèse, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-t/2} = F(t)$.

Or $P(X \leqslant t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(T > 1 + t \,|\, T > 1) = 1 - \frac{P(T>1+t \,\cap\, T>1)}{P(T>1)}$.

Donc $P(X \leqslant t) = 1 - \frac{e^{-(t+1)/2}}{e^{-1/2}} = 1 - e^{-t/2}$.

On remarque que $P(X \leqslant t) = eP(T \leqslant t)$, la loi exponentielle est en effet « sans mémoire » : avoir attendu une minute en vain ne change rien sur le temps d'attente restant (nous ne discutons pas ici la validité de la modélisation par une loi exponentielle).

## 3 Moins concret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On note $M$ une partie de $\Omega$ ayant la propriété suivante :

$$\forall C \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} C \subseteq M \Rightarrow P(C) = 0 \\ C \supseteq M \Rightarrow P(C) = 1 \end{cases}$$

### Exercice 5

Montrer que $M$ n'est pas dans $\mathcal{A}$.

**Solution**

Puisque $M \subseteq M$, si $M \in \mathcal{A}$, alors on aurait à la fois $P(M) = 0$ et $P(M) = 1$, ce qui est évidemment absurde.

On pose $\mathcal{A}_M := \{M \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

### Exercice 6

Montrer que $\mathcal{A}_M$ est une $\sigma$-algèbre sur $M$ et que l'on définit sans ambiguïté une probabilité $P'$ sur cette algèbre en posant $P'(M \cap A) := P(A)$.

**Solution**

$\mathcal{A}_M$ est une $\sigma$-algèbre car elle contient $\varnothing$, est stable par intersection et passage au complémentaire.

Faire un dessin pour la suite... Montrer que $P'$ est bien définie revient à montrer que $M \cap A = M \cap B$ implique $P(A) = P(B)$. Supposons donc $M \cap A = M \cap B$. Pour tout $m \in M$, soit $m \in \overline{A}$, soit $m \in A$ i.e. $m \in A \cap M = B \cap M$ donc $m \in B$. On vient de montrer $M \subseteq \overline{A} \cup B$.

Ainsi $P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \cup B) = 1 - 1 = 0$. Et donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A \cap B)$. Par symétrie, $P(B) = P(A \cap B) = P(A)$, cqfd.

# 4 Bataille de boules de neige

Le yéti a convaincu son petit frère de jouer à un jeu stupide : le yéti se tient prêt avec une boule de neige à la main, tandis que le petit frère doit passer d'un abri à un autre sans se faire toucher. Comme il est loin, le yéti doit anticiper le passage du petit frère et lancer sa boule quand il pense qu'il va traverser. Si le petit frère avait décidé de courir à cette seconde là (on suppose le temps discrétisé à la seconde), il est touché (le yéti vise bien) et a perdu. S'il n'avait pas décidé de passer, il peut alors traverser tranquillement le temps que le yéti se refasse une boule de neige.

Du point de vue du petit frère, s'il réussi à passer le jeu continue, s'il se fait toucher il a perdu.

## Exercice 7

Montrer que le petit frère a une stratégie pour réussir à passer un nombre infini de fois avec une probabilité arbitrairement grande (même si le yéti connaît cette stratégie).

**Solution**

Noter que si le petit frère attend que le yéti tire, alors le yéti ne tire jamais et gagne.

Voici la stratégie du petit frère. À l'étape $i$, il tire au sort uniformément un temps $t \in [\![1, 2^i n]\!]$ et passe au bout de ce temps, sauf si le yéti tire auquel cas il passe juste après. (Noter que s'il passait de tout façon au temps $t$, il suffirait alors au yéti de tirer le plus possible (i.e. un fois sur deux) et il aurait alors une chance sur deux de toucher le petit frère.)

À l'étape $i$, quelle que soit la stratégie du yéti, il ne peut toucher le petit frère qu'avec probabilité $\frac{1}{2^i n}$. La probabilité que le petit frère se fasse toucher à une étape est donc inférieure à $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i n} = \frac{1}{n}$. En choisissant $n$, on peut rendre arbitrairement grande la probabilité que le petit frère gagne.