

Probabilités conditionnelles, lois continues

1 Géopolitique des indépendants

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché (et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon).

▷ **Question 1** *Montrer que les événements suivants sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants :*

- l'héritier d'Aquitaine est un garçon ;
- l'héritier de Bourgogne est un garçon ;
- les deux héritiers sont de même sexe.

Réponse: Notons A l'évènement « l'héritier d'Aquitaine est un garçon », B l'évènement « l'héritier de Bourgogne est un garçon » et C l'évènement « les deux héritiers sont de même sexe ».

L'évènement $A \cap B \cap C$ est égal à l'évènement $A \cap B$. A et B étant supposés indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Donc $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B) = 1/4$. Or $P(A)P(B)P(C) = 1/8$. Les trois évènements ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Indépendance deux à deux : c'est vrai pour A et B par hypothèse. Montrons le par exemple pour B et C , le cas A et C est symétrique. La seule possibilité pour avoir B et C est que les deux soient des garçons. On a donc $P(B \cap C) = 1/4$, ce qui est égal à $P(B)P(C)$.

N.B. : En supposant qu'il y a des filles et des garçons, ce résultat n'est vrai que si la naissance d'une fille et d'un garçon sont équiprobables. Si, à l'inverse, la probabilité d'avoir un garçon est p tandis que celle d'avoir une fille est $1 - p$, on obtient : $P(B \cap C) = p^2$ et $P(B) \times P(C) = p \times (p^2 + (1 - p)^2)$. Les deux ne sont égaux que si $2p^3 - 3p^2 + p = 0$, i.e. soit il n'y a que des filles ($p = 0$), soit que des garçons ($p = 1$), soit $p = \frac{1}{2}$.

Le président des États-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne 4 ans.

▷ **Question 2** *En supposant exacte cette estimation et sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0,95.*

Réponse: En notant $P(X \leq x)$ la probabilité pour que la durée de la crise soit inférieure à x années, on cherche x vérifiant $P(X \leq x) \leq 0,95$. Or $P(X \leq x) = F(x)$ avec $F'(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$ (sur \mathbb{R}^+) car la crise suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans. Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $F(x) = 1 - e^{-x/4}$. On obtient donc $x \simeq 11,98$. Le nombre de boîtes à acheter est finalement $\lceil \frac{11,98 \times 365,25 \times 2}{500} \rceil = 18$ boîtes.

2 Côté

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques indépendantes¹ :

- la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100
- une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

▷ **Question 3** *La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminer le temps le plus probable.*

Réponse: Notons de la façon suivante les différents évènements :

- B : Il fait beau.
- M : La météo a raison.
- G : La grenouille a raison.
- A : La météo prévoit de la pluie tandis que la grenouille prévoit du beau temps.

¹La météo nationale n'utilise pas de grenouilles

La formule de Bayes nous permet d'affirmer :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

Or $P(A|B) = \frac{2}{100} \times \frac{19}{20} = \frac{38}{2000}$ et $P(A|\bar{B}) = \frac{98}{100} \times \frac{1}{20} = \frac{98}{2000}$. Donc

$$P(B|A) = \frac{38 \times 7}{38 \times 7 + 98 \times 3} = 0,475.$$

Le plus probable est donc qu'il fasse mauvais.

▷ **Question 4** *Le club astro a invité toute la Rez à observer le ciel pour la nuit des étoiles filantes. On suppose que cette fois il fait beau. Le temps T qui sépare le passage de deux étoiles filantes suit une loi exponentielle de moyenne 2 minutes. Sachant que l'on vient de scruter le ciel en vain pendant une minute, déterminer la loi de probabilité de la variable X égale au temps qu'il faut encore attendre avant de voir une étoile filante.*

Réponse:

Autre méthode. Par hypothèse, $P(T \leq t) = 1 - e^{-t/2} = F(t)$.

Or $P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(T > 1+t | T > 1) = 1 - \frac{P(T > 1+t \cap T > 1)}{P(T > 1)}$.

Donc $P(X \leq t) = 1 - \frac{e^{-(t+1)/2}}{e^{-1/2}} = 1 - e^{-t/2}$.

On remarque que $P(X \leq t) = eP(T \leq t)$, la loi exponentielle est en effet « sans mémoire » : avoir attendu une minute en vain ne change rien sur le temps d'attente restant (nous ne discutons pas ici la validité de la modélisation par une loi exponentielle).

3 Moins concret

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité. On note M une partie de Ω ayant la propriété suivante :

$$\forall C \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} C \subseteq M \Rightarrow P(C) = 0 \\ C \supseteq M \Rightarrow P(C) = 1 \end{cases}$$

▷ **Question 5** *Montrer que M n'est pas dans \mathcal{A} .*

Réponse: Puisque $M \subseteq M$, si $M \in \mathcal{A}$, alors on aurait à la fois $P(M) = 0$ et $P(M) = 1$, ce qui est évidemment absurde.

On pose $\mathcal{A}_M := \{M \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

▷ **Question 6** *Montrer que \mathcal{A}_M est une algèbre sur M et que l'on définit sans ambiguïté une probabilité P' sur cette algèbre en posant $P'(M \cap A) := P(A)$.*

Réponse: \mathcal{A}_M est une algèbre car elle est non vide et stable par intersection et passage au complémentaire. Faire un dessin pour la suite...

Montrer que P' est bien définie revient à montrer que $M \cap A = M \cap B$ implique $P(A) = P(B)$. Supposons donc $M \cap A = M \cap B$. Pour tout $m \in M$, soit $m \in \bar{A}$, soit $m \in A$ i.e. $m \in A \cap M = B \cap M$ donc $m \in B$. On vient de montrer $M \subseteq \bar{A} \cup B$.

Ainsi $P(A \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cup B) = 1 - 1 = 0$. Et donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B)$. Par symétrie, $P(B) = P(A \cap B) = P(A)$, cqfd.