Probabilités conditionnelles, lois continues

1 Géopolitique des indépendants

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché (et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préférerait un garçon).

Exercice 1

Montrer que les événements suivants sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants :
– l'héritier d'Aquitaine est un garçon ;
– l'héritier de Bourgogne est un garçon ;
– les deux héritiers sont de même sexe.
Le président des États-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne 4 ans.

Exercice 2

En supposant exacte cette estimation et sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre minimal de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0,95.

2 Côa

Le 14 juillet à Saint Troupaize il fait beau 7 fois sur 10. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévision météorologiques indépendantes[1] :
– la météo nationale qui se trompe deux fois sur 100
– une grenouille verte qui se trompe une fois sur 20.

Exercice 3

La météo annonce de la pluie alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Déterminer le temps le plus probable.

Exercice 4

Le club astro a invité toute la Rez à observer le ciel pour la nuit des étoiles filantes. On suppose que cette fois il fait beau. Le temps T qui sépare le passage de deux étoiles filantes suit une loi exponentielle de moyenne 2 minutes. Sachant que l'on vient de scruter le ciel en vain pendant une minute, déterminer la loi de probabilité de la variable X égale au temps qu'il faut encore attendre avant de voir une étoile filante.

3 Moins concret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On note M une partie de Ω ayant la propriété suivante :

$$\forall C \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} C \subseteq M \Rightarrow P(C) = 0 \\ C \supseteq M \Rightarrow P(C) = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Montrer que M n'est pas dans $\mathcal{A}$.
On pose $\mathcal{A}_M := \{M \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

Exercice 6

Montrer que $\mathcal{A}_M$ est une σ-algèbre sur M et que l'on définit sans ambiguïté une probabilité P' sur cette algèbre en posant $P'(M \cap A) := P(A)$.

[1] La météo nationale n'utilise pas de grenouilles

4 Bataille de boules de neige

Le yéti a convaincu son petit frère de jouer à un jeu stupide : le yéti se tient prêt avec une boule de neige à la main, tandis que le petit frère doit passer d'un abri à un autre sans se faire toucher. Comme il est loin, le yéti doit anticiper le passage du petit frère et lancer sa boule quand il pense qu'il va traverser. Si le petit frère avait décidé de courir à cette seconde là (on suppose le temps discrétisé à la seconde), il est touché (le yéti vise bien) et a perdu. S'il n'avait pas décidé de passer, il peut alors traverser tranquillement le temps que le yéti se refasse une boule de neige.

Du point de vue du petit frère, s'il réussi à passer le jeu continue, s'il se fait toucher il a perdu.

Exercice 7

Montrer que le petit frère a une stratégie pour réussir à passer un nombre infini de fois avec une probabilité arbitrairement grande (même si le yéti connaît cette stratégie).