Espérances

Exercice 1 Un problème pratique

Un grand nombre n de gens doivent se soumettre à un test de dépistage. Cette opération peut se gérer de deux façons :

1. Chaque échantillon est testé séparément, auquel cas n tests sont nécessaires.
2. Les échantillons sont mélangés par paquets de k puis le mélange est testé. Si le test est négatif, ce test suffit. Si le test est positif, chacun des k échantillons doit être retesté séparément, ce qui donne un nombre final de tests de $k+1$.

Soit p la probabilité qu'un échantillon soit positif, on suppose les échantillons indépendants et identiquement distribués.

1. Quelle est la probabilité qu'un mélange de k échantillons soit positif ?
2. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X du nombre de tests nécessaires en utilisant la seconde méthode (on supposera n divisible par k) ?
3. Pour p petit, quelle est la valeur de k qui minimise le nombre de tests ?

Exercice 2 Un problème discret

Soit $t_1, t_2, \dots, t_r$ le résultat d'une sélection (avec remise) de r éléments pris dans l'ensemble $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Soit X la variable aléatoire qui donne le plus petit r satisfaisant

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > 1$$

On souhaite montrer que $\mathbb{E}(X) = (1+1/n)^n$. Pour cela, on peut considérer une variante équivalente de l'expérience, qui consiste à choisir avec remise un ensemble d'éléments $t_1, t_2, \dots, t_r$ dans l'ensemble $(1, 2, \dots, n)$. X est alors la variable aléatoire du plus petit r qui satisfait

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r > n$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant j+1) = \binom{n}{j}(\frac{1}{n})^j$
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant j+1)$.
3. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X)$ et sa limite quand $n \to \infty$.

Exercice 3 Un problème théorique (et pratique aussi, finalement)

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ une collection de variables aléatoires discrètes ayant des espérances finies.

1. Montrer que, pour toute variable aléatoire Y,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y = y\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i \mid Y = y)$$

2. On lance 2 dés. Soit X la variable aléatoire de la somme des deux lancés. Soit X_1 la variable aléatoire du résultat du premier lancer. Calculer $\mathbb{E}(X \mid X_1)$ en fonction de X_1.
3. $\mathbb{E}(X \mid X_1)$ est donc une variable aléatoire fonction de X_1. Plus généralement, démontrer le théorème suivant :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))$$

4. Considérons maintenant un programme dont la procédure principale inclut un appel à la procédure $\mathcal{S}$. Chaque appel à $\mathcal{S}$ lance récursivement des copies de $\mathcal{S}$, où le nombre de copies suit une loi aléatoire binomiale de paramètres n et p. Ces variables aléatoires sont indépendantes. On cherche l'espérance du nombre de copies de $\mathcal{S}$.
Raisonnons en terme de *génération*. Le lancement initial de $\mathcal{S}$ est dans la génération 0. Sinon, un processus de génération i a été lancé par un processus de génération $i-1$. Notons Y_i le nombre de copies de $\mathcal{S}$ de génération i. On voit facilement que $\mathbb{E}(Y_0) = 1$ et $\mathbb{E}(Y_1) = np$.
Supposons que l'on connaisse y_{i-1}, la valeur de Y_{i-1}. Comment peut-on calculer l'espérance de Y_i ?
5. Donner l'espérance du nombre total de copies au bout de i générations.

Exercice 4 Un problème de boules

Vous avez une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches, et 80 dollars. Chance ! Vous allez pouvoir jouer à un super jeu. Sortez les boules une par une sans remise. A chaque fois, pariez la moitié de votre fortune que c'est une blanche qui apparait.

Quelle est la fortune finale que vous pouvez espérer ?