Poisson – TD court

1 Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P} = \mathcal{C}(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$, avec $\lambda > 0$. On appelle ***fonction génératrice de*** X la fonction $G_X(z) := \sum_{k\geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 1

Donner une autre expression pour $G_X(z)$.

Solution

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= C(\lambda) \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \\ &= C(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda z} \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer $G'_X(1) + G''_X(1) - G'_X(1)^2$.

Solution $G'_X(z) = \lambda G_X(z)$ et $G''_X(z) = \lambda^2 G_X(z)$. D'où $G'_X(1) + G''_X(1) - G'_X(1)^2 = G_X(1)(\lambda + \lambda^2 - \lambda^2 G_X(1))$.

Exercice 3

Montrer que $\mathcal{C}(\lambda) = e^{-\lambda}$.

Solution X est une variable aléatoire, on a donc $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Or $G_X(1) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X = k) = C(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda}$, d'où le résultat $C(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Exercice 4

Calculer la fonction génératrice de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Solution La fonction génératrice de X est donc $G_X(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$. On a en toute généralité :

$$G'_X(z) = \sum_{k\geqslant 1} k z^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \quad \text{et} \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$$

$$G''_X(z) = \sum_{k\geqslant 2} k(k-1) z^{k-2} \mathbb{P}(X = k) = \quad \text{et} \quad G''_X(1) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)$$

Pour la loi exponentielle :

- $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = G'_X(1) + G''_X(1) - G'_X(1)^2 = \lambda$

Exercice 5

Reprendre la question précédente en supposant que X est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Solution On suppose maintenant que X suit une loi binomiale de paramètre (n, p). On calcule sa fonction génératrice :

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pz + (1-p))^n \end{aligned}$$

et ses deux premières dérivées succesives :

$$G'_X(z) = np(zp + 1 - p)^{n-1} \quad G''_X(z) = n(n-1)p^2(zp + 1 - p)^{n-2}$$

On en déduit alors facilement son espérance et sa variance :

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Remarque. Trois applications ont des noms proches :
- la fonction génératrice des moments : $z \mapsto \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-zX}\right)$,
- la transformée de Laplace $X \mapsto \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{zX}\right)$,
- la fonction génératrice, pour une v.a. entière, $z \mapsto \mathbb{E}\left(z^X\right) = \sum_{k\geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k)$

2 Batraciens probabilistes

On suppose qu'un batracien pond N œufs selon une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les œufs évoluent indépendamment les uns des autres et que chaque œuf éclot avec une probabilité p. On note X le nombre d'œufs éclos.

Exercice 6

Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N).

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x \text{ et } N = n) &= \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}(X = x \mid N = n) \\ &= \tfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\tbinom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\end{aligned}$$

Exercice 7

En déduire la loi de X.

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x) &= \textstyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}(X = x \mid N = n) \\ &= \textstyle\sum_{n\geqslant x}(\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda})(\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\textstyle\sum_{n\geqslant x}\binom{n}{x}(\lambda p)^x(\lambda-\lambda p)^{n-x} \\ &= \tfrac{(\lambda p)^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}\textstyle\sum_{n\geqslant x}\frac{(\lambda-\lambda p)^{n-x}}{(n-x)!} \\ &= \tfrac{(\lambda p)^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}\textstyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\lambda-\lambda p)^k}{(k)!} \\ &= \tfrac{(\lambda p)^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda p}\end{aligned}$$

X suit donc aussi une loi de poisson, de paramètre λp.

3 Poisson probable

Supposons qu'il existe quelque part une expérience aléatoire à laquelle on a assigné une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = m$.

Exercice 8

Montrer que la valeur la plus probable de l'expérience est l'entier k tel que $m - 1 \leqslant k \leqslant m$.

Solution On rapelle la loi de Poisson :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{m^k}{k!}\mathrm{e}^{-m}$$

Le rapport entre deux valeurs successives est :

$$R = \frac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{m}{k+1}$$

Les probabilités sont croissantes puis décroissantes. $R > 1 \iff k < m - 1$ et la probabilité est maximum pour $k = \lfloor n \rfloor$.

Exercice 9

Dans quelles conditions peut-il y a voir deux valeurs plus probables ?

Solution Il y a deux valeurs plus probables si et seulement si $\exists k \quad R_k = 1$. c'est-à-dire si $m \in \mathbb{N}$.