Poisson – TD court

1 Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P} = \mathcal{C}(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$, avec $\lambda > 0$. On appelle ***fonction génératrice de*** X la fonction $G_X(z) := \sum_{k \geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k)$.

Exercice 1

Donner une autre expression pour $G_X(z)$.

Exercice 2

Calculer $G_X^{'}(1) + G_X^{''}(1) - G_X^{'}(1)^2$.

Exercice 3

Montrer que $\mathcal{C}(\lambda) = e^{-\lambda}$.

Exercice 4

Calculer la fonction génératrice de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 5

Reprendre la question précédente en supposant que X est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Remarque. Trois applications ont des noms proches :
- la fonction génératrice des moments : $z \mapsto \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-zX}\right)$,
- la transformée de Laplace $X \mapsto \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{zX}\right)$,
- la fonction génératrice, pour une v.a. entière, $z \mapsto \mathbb{E}\left(z^X\right) = \sum_{k \geqslant 0} z^k \mathbb{P}(X = k)$

2 Batraciens probabilistes

On suppose qu'un batracien pond N œufs selon une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les œufs évoluent indépendamment les uns des autres et que chaque œuf éclot avec une probabilité p. On note X le nombre d'œufs éclos.

Exercice 6

Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N).

Exercice 7

En déduire la loi de X.

3 Poisson probable

Supposons qu'il existe quelque part une expérience aléatoire à laquelle on a assigné une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = m$.

Exercice 8

Montrer que la valeur la plus probable de l'expérience est l'entier k tel que $m - 1 \leqslant k \leqslant m$.

Exercice 9

Dans quelles conditions peut-il y a voir deux valeurs plus probables ?