

Graphes aléatoires, sporz

Exercice 1 Graphes aléatoires

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On appelle **triangle de G** un sous-ensemble de $\{x, y, z\}$ de trois sommets distincts de G tel que $\{x, y\} \in E$, $\{x, z\} \in E$ et $\{y, z\} \in E$. Pour rappel, on appelle **distance** de deux sommets du graphe le nombre d'arêtes du plus court chemin entre ces deux sommets. Le **diamètre** du graphe est le maximum des distances entre deux sommets du graphe. Le modèle de graphe aléatoire d'Erdős-Rényi $G(n, p)$ est le graphe $G(V, E)$ tel que $|V| = n$ et $\forall x, y \in V, \mathbb{P}(\{x, y\} \in E) = p$.

Soit x et y deux sommets distincts.

- ▷ 1. Calculer $\mathbb{P}(\exists z \{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E)$.
- ▷ 2. Calculer la probabilité de l'évènement « $\{x, y\}$ est l'un des côtés d'un triangle ».
- ▷ 3. Soit E_x l'évènement $\exists y \neq x \forall z \neg(\{z, x\} \in E \wedge \{z, y\} \in E)$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_x)$.
- ▷ 4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(G(n, p)$ contient au moins un triangle).
- ▷ 5. Quel est le nombre de triangles que l'on peut espérer dans un tel graphe ?
- ▷ 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\text{diamètre}(G(n, p)) \leq 2)$.
- ▷ 7. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\text{diamètre}(G(n, p)) = 2)$.

Exercice 2 (**) Sporz

La difficulté de cet exercice réside dans la modélisation.

Les joueurs de sporz(.fr) on parfois à révéler une information au groupe tout en restant anonyme. Ils ont mis au point le protocole suivant. Un joueur qui souhaite révéler une information fait un tirage au sort (par exemple en regardant discrètement le nombre de secondes de sa montre) ;

- avec probabilité p , il publie l'information à voix haute¹ ;
- sinon, il choisit au hasard un joueur, lui transmet discrètement l'information, et lui demande de faire pareil (regarder sa montre, etc.).

- ▷ 1. Vous êtes l'un des n joueurs, et vous entendez quelqu'un publier à voix haute une information, quelle est la probabilité qu'il en soit l'auteur ?
- ▷ 2. Quelqu'un vient de vous transmettre discrètement une information, quelle est la probabilité qu'il en soit l'auteur ?

Solution

- ▷ 1. Notons L le nombre de personnes par qui l'information s'est transmise avant d'être publiée (auteur exclu). En d'autres termes, L est la longueur de la chaîne. L'évènement qui nous intéresse est « $L = 0$ », qui est de probabilité p .
- ▷ 2. Soient les évènements E_i : « Le joueur i est l'auteur de l'information » et A : « La personne qui vous parle discrètement est l'auteur. » On sait que l'auteur n'a pas publié son information dès le début (car quelqu'un est en train de vous parler discrètement). $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A | E_i) = \sum_i L$ l'auteur vous a choisi en premier

¹Le jeu a une phase où les joueurs circulent dans la pièce et se parlent librement.