Loi normale, fonctions caractéristiques

Exercice 1

À un examen, les notes suivent une loi normale de moyenne 7 et écart type 3.

▷ 1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10

▷ 2. Calculer la note en dessous de laquelle se trouvent 10% des étudiants.

▷ 3. Compte tenu des résultats, on décide de revaloriser les notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50% et 7 ?

Solution

▷ 1. Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(X \geqslant 10\right) & = & \mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{10-7}{3}\right) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(Y < 1\right) \\ & \simeq & 1 - 0{,}8413 \\ & \simeq & 0{,}1587 \end{array}$$

Donc environ 16% ont plus de 10.

▷ 2.

$$\begin{array}{rrl} & \mathbb{P}(X < x \quad) = & 0{,}1 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(Y < \frac{x-7}{3} \quad) = & 0{,}1 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(Y > \frac{x-7}{3} \quad) = & 0{,}9 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(Y < -\frac{x-7}{3}) = & 0{,}9 \\ \text{Or} & \mathbb{P}(Y < 1{,}28 \quad) \simeq & 0{,}9 \\ \text{On cherche donc} & -\frac{x-7}{3} \qquad \simeq & 1{,}28 \\ & x \qquad \simeq & 3{,}84 \end{array}$$

▷ 3. La moyenne actuelle est 7 et elle doit passer à 10, donc $7a + b = 10$. (En effet, pour une loi normale, moyenne et médiane sont éales). De plus,

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}(aX + b < 7\ ) = 0{,}1 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(aX + b > 7\ ) = 0{,}9 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(X > \frac{7-b}{a} \quad) = 0{,}9 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(Y > \frac{\frac{7-b}{a}-7}{3}\ ) = 0{,}9 \\ \Longleftrightarrow & \mathbb{P}(Y < \frac{b-7+7a}{3a}) = 0{,}9 \\ \Longleftrightarrow & \frac{b-7+7a}{3a} \qquad \simeq 1{,}28 \end{array}$$

Or $7a + b = 10$ donc $\frac{1}{a} \simeq 1{,}28$ i.e. $a \simeq 0{,}78$. Puis $b \simeq 4{,}54$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

▷ 1. Calculer sa fonction caractéristique.

▷ 2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}\left(X > a + b \,|\, X > b\right) = \mathbb{P}\left(X > a\right)$.

Solution

▷ 1.

$$\begin{array}{rcl} \Phi(X) & = & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\ & = & \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\ & = & \lambda \int_0^{+\infty} e^{x(it-\lambda)} \mathrm{d}x \\ & = & \frac{\lambda}{it-\lambda} [e^{x(it-\lambda)}]_0^{+\infty} \\ & = & -\frac{\lambda}{it-\lambda} \end{array}$$

▷ 2.

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(X > a+b \,|\, X > b\right) & = & \frac{\mathbb{P}(X>a+b \cap X>b)}{\mathbb{P}(X>b)} \\ & = & \frac{\mathbb{P}(X>a+b)}{\mathbb{P}(X>b)} \\ & = & \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda b}} \\ & = & e^{-\lambda a} \\ & = & \mathbb{P}\left(X > a\right)\end{array}$$

Exercice 3

Soient X et Y deux lois normales centrées réduites indépendantes.

▷ 1. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que les lois $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Solution Soit $U = X+Y$ et $V = X-Y$. $\Phi_X(t) = \Phi_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

U et V sont indépendantes si et seulement si $\Phi_{U,V}(s,t) = \Phi_U(s)\Phi_V(t)$.

$$\begin{array}{rcl}\Phi_U(t) & = & \Phi_X(t)\Phi_Y(t) \\ & = & e^{-t^2} \\ \Phi_V(t) & = & e^{-t^2} \\ \Phi_U(s)\Phi_V(t) & = & e^{-s^2-t^2} \\ \Phi_{U,V}(s,t) & = & \mathbb{E}\left(e^{i(sU+tV)}\right) \\ & = & \mathbb{E}\left(e^{i[(X+Y)s+(X-Y)t]}\right) \\ & = & \mathbb{E}\left(e^{iX(s+t)}\right)\mathbb{E}\left(e^{iY(s-t)}\right) \\ & = & \Phi_X(s+t)\Phi_Y(s-t) \\ & = & e^{-\frac{(s+t)^2}{2}}e^{-\frac{(s-t)^2}{2}} \\ & = & e^{-\frac{1}{2}(s^2+2st+t^2+s^2-2st+t^2)} \\ & = & e^{-s^2-t^2} \\ & = & \Phi_U(s)\Phi_V(t)\end{array}$$

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

▷ 1. Quelle est la loi de $X+Y$?

▷ 2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=n$, pour $n \in \mathbb{N}$?

Solution

▷ 1.

$$\begin{array}{rcl}\Phi_{X+Y}(t) & = & \Phi_X(t)\Phi_Y(t) \\ & = & e^{\lambda(e^t-1)}e^{\mu(e^t-1)} \\ & = & e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}\end{array}$$

Donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

▷ 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x \mid X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X = x \cap X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y=n-x)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-x}}{(n-x)!}}{e^{-\lambda-\mu}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{\lambda^x\mu^{n-x}n!}{x!(n-x)!(\lambda+\mu)^n} \\
&= C_n^x\frac{\lambda^x\mu^{n-x}}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= C_n^x\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-x} \\
&= C_n^x\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-x}
\end{aligned}$$

C'est donc une loi binomiale de paramètre n et $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.