Le principe de Yao

Nous allons montrer le principe de Yao : pour un problème donné, la meilleure complexité d'un algorithme déterministe sur la pire distribution d'entrées est égale à la meilleure complexité d'un algorithme probabiliste sur la pire entrée.

On considère un jeu

- à information complète : les joueurs connaissent les actions autorisées (stratégies pures) et les gains qui en découlent ;
- sans hasard (mais un joueur peut choisir une distribution de probabilité entre les stratégies pures, c'est alors une stratégie mixte) ;
- à deux joueurs ;
- à somme nulle : ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre. Toute négociation est donc inutile. C'est un jeu non coopératif (contrairement au dilemme du prisonnier, par exemple) ;
- fini.

Un tel jeu est représenté par une matrice A. Si Marianne joue la stratégie pure i et Jacques la stratégie pure j, alors le gain de Marianne est $a_{i,j}$ et celui de Jacques est $-a_{i,j}$ (la perte de Jacques est $a_{i,j}$).

Question 1 Stratégies pures

▷ 1. Si Marianne joue i, quel est son gain minimum ? Quelle stratégie pure i doit-elle adopter pour maximiser ce gain minimal, appelé gain plancher et noté v'_I ?

▷ 2. Si Jacques joue j quel est sa perte maximale ? Quelle stratégie pure j doit-il adopter pour minimiser cette perte maximale, appelée perte plafond et notée v'_{II} ?

▷ 3. Donner la relation entre v'_I et v'_{II}. Quels sont les cas d'égalité ?

▷ 4. Calculer v'_I et v'_{II} pour le jeu pierre/ciseau/feuille.

Question 2 Stratégies mixtes

▷ 1. Lorsqu'il n'existe pas de point selle on considère les stratégies mixtes. Une stratégie mixte pour Marianne est une distribution de probabilité $x = (x_i)$ sur les lignes et une stratégie mixte pour Jacques est une distribution de probabilité $y = (y_j)$ sur les colonnes ($x_i \geqslant 0$, $y_j \geqslant 0$, $\sum_i x_i = 1$ et $\sum_j y_j = 1$). Montrer que si on représente x et y par des vecteurs lignes, l'espérance du gain de Marianne est alors xAy^t.

▷ 2. Fisons x une stratégie mixte pour Marianne. Quel est le minimum de l'espérance de son gain ? Montrer qu'il est atteint pour une stratégie pure de Jacques (c'est le lemme de Loomis). Quelle stratégie x doit-elle adopter pour maximiser cette espérance notée v_I (on cherche simplement à l'exprimer, pas à la simplifier) ?
Même question pour la perte v_{II} de Jacques.

Question 3 MiniMax

Nous allons montrer le

Théorème 1 (Minimax, Von Neumann, 1928)**.**

$$v_I = v_{II}$$

C'est un cas particulier de l'équilibre de Nash : chaque joueur a la meilleure stratégie si on considère celles des autres comme fixées.

▷ 1. (Admise pour l'instant, y revenir à la fin.) Montrer :

Théorème 2. *Soit B un convexe fermé de l'espace euclidien de dimension n et soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un point n'appartenant pas à B. Alors il existe des réels $p_1 ... p_{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_{n+1}$ et pour tout y dans B $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i > p_{n+1}$.*

Indications : montrer qu'il existe un point z de B qui minimise la distance à x. Définir les p_i en fonction de ce point. Montrer qu'alors on a bien la deuxième inégalité en pensant à utiliser toutes les hypothèses.

▷ 2. En déduire :

Lemme 3. *Soit A une matrice $m \times n$. Elle vérifie alors une des propriétés suivantes :*

(i) Le point 0 de l'espace de dimension m appartient à l'enveloppe convexe des $m + n$ points : les colonnes a_1 … a_n de la matrice A et les vecteurs $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, …, e_m de la base canonique.

(ii) Il existe des réels x_1, …, x_m strictement positifs et de somme 1 tels que pour tout entier j compris entre 1 et n on ait $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i > 0$.

▷ 3. *(Preuve du minimax)* En utilisant le lemme précédent montrer qu'il est impossible d'avoir $v_I \leqslant 0 < v_{II}$. En prenant k réel quelconque et en modifiant le jeu montrer qu'il est également impossible d'avoir $v_I \leqslant k < v_{II}$. Conclure.
La valeur commune de $v_I = v_{II}$ est appelée ***valeur du jeu***. Une paire de stratégies optimales (x, y) est une ***solution du jeu***.

▷ 4. Quelle est la valeur d'un jeu symétrique, i.e. dont la matrice est antisymétrique ?

Question 4 principe de Yao

▷ 1. Montrer le principe de Yao. Pour un entier n on considerera un majorant $t(n)$ à la fois du temps de calcul du meilleur algorithme déterministe sur la pire distribution d'entrées de taille n et du temps de calcul du meilleur algorithme aléatoire sur la pire entrée.

Remarques.
- La preuve donnée n'est pas constructive !
- Attention, la stratégie doit être vraiment aléatoire, sinon l'adversaire peut faire des prévisions !